

# Квант

ISSN 0130—2221

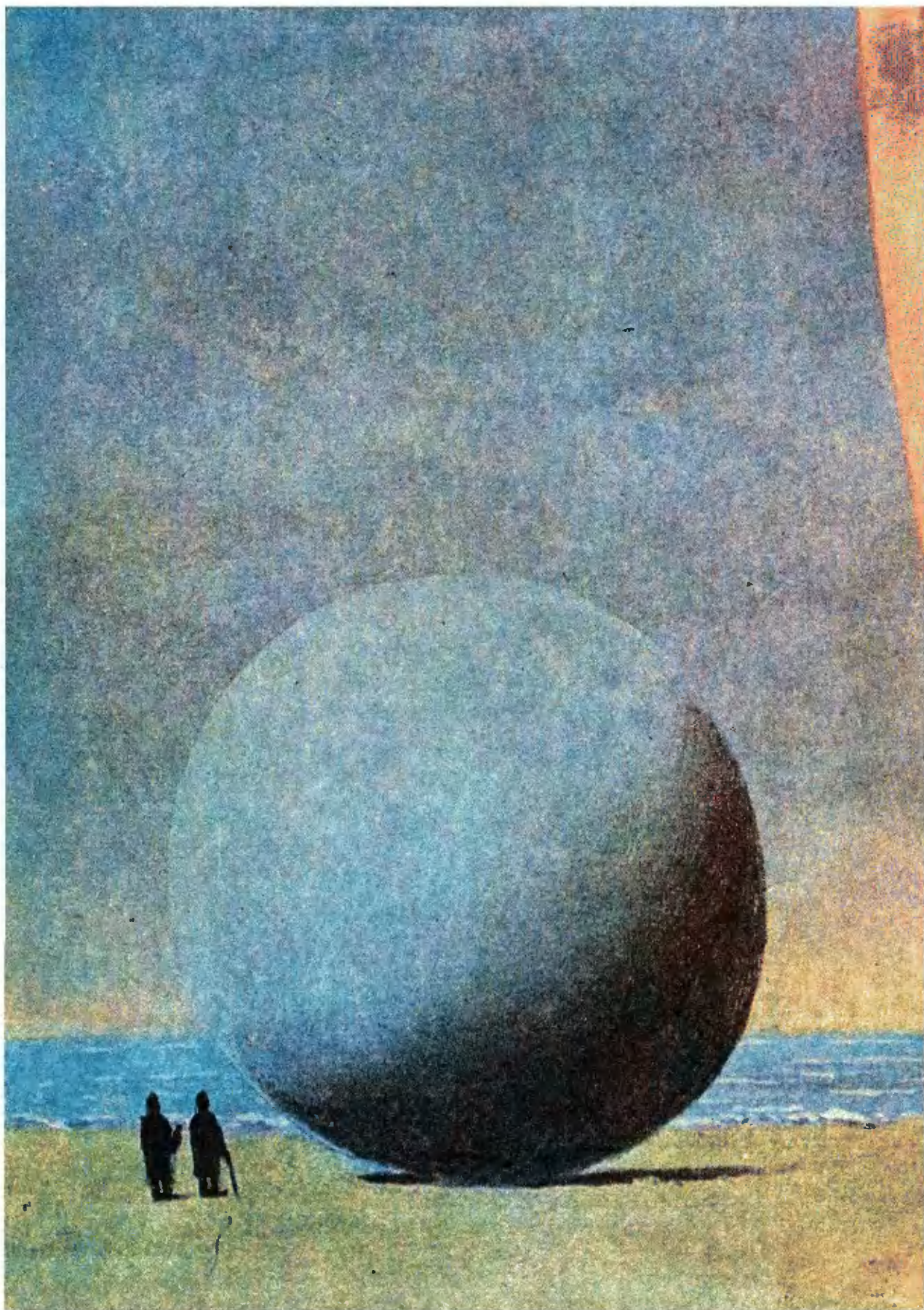
Научно-популярный  
физико-математический журнал

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12



Формула рождения звезд

1991



Выходит с января 1970 года

Ежемесячный  
научно-популярный  
физико-математический  
журнал

Учредители —  
Президиум  
Академии наук СССР,  
Президиум  
Академии педагогических  
наук СССР  
и трудовой коллектив  
редакции журнала «Квант»



Москва, «Наука».  
Главная редакция  
физико-математической  
литературы

## В номере:

- 2 А. Панов. Движение по поверхности и удар  
10 В. Сурдин, С. Ламзин. Формула рождения звезд
- Задачник «Кванта»**  
18 Задачи M1311—M1315, Ф1318—Ф1322  
20 Решения задач M1286—M1290, Ф1298—Ф1302
- «Квант» для младших школьников**  
27 Задачи  
28 Л. Крыжановский. Загадка лейденской банки  
30 Конкурс «Математика 6—8»
- Школа в «Кванте»**  
Физика 9—11:  
31 Пока вода испаряется...  
33 Как излучать радиоволны?  
36 Избранные школьные задачи по физике
- Математический кружок**  
38 В. Залгаллер. Индикатриса ширин и ее применение  
40 Калейдоскоп «Кванта»
- Практикум абитуриента**  
44 П. Горнштейн, В. Полонский, М. Якир. Необходимые условия и задачи с параметрами
- Информатика и программирование**  
50 Б. Тарасенко. Алгоритмика простоты. В сто раз быстрее
- Игры и головоломки**  
52 Ханойская башня
- Олимпиады**  
55 XXV Всесоюзная олимпиада по математике  
59 XXV Всесоюзная олимпиада по физике  
65 IV Всесоюзная олимпиада школьников по информатике
- Информация**  
17 Заочная аэрокосмическая школа  
68 Заочная биолого-математическая олимпиада  
70 Конференция в Обнинске  
71 Ответы, указания, решения
- Нам пишут (30)**
- Наша обложка**  
1 Эмиссионная туманность Мессье 16, в которой газ разогрет новорожденными звездами. Если вас интересует формула рождения звезд, читайте статью на с. 10.  
2 «Когда пробьет час» — так мы перевели название этой картины Р. Магритта ("Wenn Die Stunde Schlägt"). Когда пробьет час и на мир обрушится неведомый удар судьбы — будет он упругим или неупругим?.. Математическая сторона этого вопроса отражена в статье А. Панова (см. с. 2).  
3 Шахматная страничка.  
4 Головоломка «куб Дениса».

# ДВИЖЕНИЕ ПО ПОВЕРХНОСТИ И УДАР

Кандидат физико-математических наук  
А. ПАНОВ

Теория движения по поверхности и теория удара — два прекрасно дополняющих друг друга раздела механики. Изучением движения по поверхностям занимались такие гиганты как Эйлер, Лагранж, Гамильтон, Якоби. Выработанные ими представления составляют основу современной механики, математики и физики. Эксперименты по соударению шаров проводили Гюйгенс и Ньютон. Именно эти эксперименты позволили Гюйгенсу сформулировать закон сохранения количества движения\*).

Здесь мы обсудим ряд конкретных экспериментов. Вот первый из них, который послужит образцом для всего остального. Внутри стеклянной бутылки поместите небольшой стальной шарик и, встряхнув ее, заставьте шарик двигаться по внутренней поверхности



бутылки. К сожалению, в этом эксперименте трудно внимательно проследить за движением шарика, поскольку оно быстро прекращается. Силы трения замедляют движение шарика, и сила тяжести на верхнем участке траектории отрывает медленно движущийся шарик от поверхности сосуда. Давайте поставим чистый эксперимент, считая, что мы находимся в условиях невесомости и рассматривая

## Движение по абсолютно гладкой поверхности

Абсолютно гладкая поверхность — это такая поверхность, что при движе-

нии по ней на тело не действуют силы трения. Возьмем маленький шарик и толчком запустим его вдоль поверхности. Абсолютная гладкость означает, что абсолютная величина скорости шарика постоянна и что отсутствует боковой снос шарика вдоль поверхности, т. е. вектор ускорения направлен перпендикулярно поверхности. Дадим следующее определение:

*кривая на поверхности называется геодезической, если вектор ускорения точки, равномерно движущейся вдоль этой кривой, всегда направлен перпендикулярно поверхности.*

Таким образом, маленький шарик, движущийся вдоль абсолютно гладкой поверхности, движется по геодезической. Значит, изучение движения шарика сводится к изучению геодезических на этой поверхности.

**Задача 1.** Докажите, что на сфере окружности наибольшего радиуса являются геодезическими.

**Указание.** Пусть шарик движется в некотором направлении. Проведем окружность достаточно большого радиуса, касающуюся этого направления. Как вы думаете, когда шарик будет сворачивать с этой окружности, куда он повернет?

Геодезические относятся к числу важнейших понятий механики, математики и физики. Более того, геодезические и связанные с ними понятия составляют общую часть фундамента, на котором покоятся эти три науки.

Опишем еще одно характеристическое свойство геодезических. На поверхности зафиксируем две точки  $M$  и  $N$ . Их можно соединить различными кривыми, лежащими на поверхности. Среди этих кривых имеется кратчайшая. Оказывается, что эта кратчайшая является геодезической.

\* ) Об этом можно прочитать в статье В. Козлова «Соударение тел» («Квант» № 9 за 1988 год, с. 30).

Таким образом, геодезические можно описать как кратчайшие линии на поверхности, или более точно

*кривая, лежащая на поверхности, будет геодезической, если ее любая достаточно малая дуга АВ является кратчайшей, соединяющей точки А и В.*

К сожалению, движение реального шарика внутри реальной бутылки идет отнюдь не вдоль геодезической. Рассмотрим два простых подхода, которые позволяют получить ясное представление о ходе геодезических.

### Геодезические на поверхности вращения. Теорема Клеро

Большинство из тех поверхностей, по которым мы можем заставить двигаться шарик, — поверхность бутылки, банки, графина и так далее — все это поверхности вращения. У них есть ось вращения, при повороте вокруг которой на любой угол они совмещаются сами с собой. Как раз о геодезических на таких поверхностях идет речь в следующей теореме.

**Теорема Клеро.** *Рассмотрим геодезическую на поверхности вращения. Пусть точка А пробегает эту геодезическую и  $r$  — расстояние от точки А до оси вращения поверхности, а  $\alpha$  — угол между геодезической и меридианом в точке А. Тогда величина  $r \sin \alpha$  постоянна вдоль геодезической:*

$$r \sin \alpha = c.$$

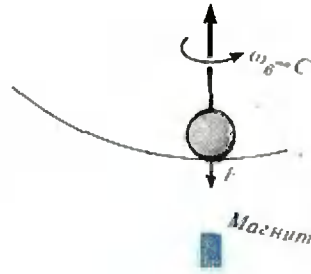
А вот что можно извлечь из этой теоремы. Пусть точка А движется вдоль геодезической в сторону убывания  $r$ . Тогда из соотношения  $r \sin \alpha = c$

следует, что при уменьшении  $r$  синус угла  $\alpha$  увеличивается. В момент, когда геодезическая касается параллели, т. е.  $\alpha = \pi/2$ , из теоремы Клеро получаем, что  $r$  достигает минимально возможного значения, равного  $c$ . После касания геодезическая отражается от параллели,  $r$  начинает возрастать до максимального, а потом опять убывает до того же самого минимального значения  $c$ . Таким образом, точка на геодезической движется в кольце между параллелями одного радиуса, попеременно касаясь их. Это описание дает ясное представление о ходе геодезических и, тем самым, о движении маленького шарика вдоль абсолютно гладкой поверхности вращения.

### Машина для движения по геодезическим

Второй подход к изучению геодезических носит экспериментальный характер. Он применим не только к поверхностям вращения, но и вообще к любым поверхностям. Возьмите моток клейкой ленты, лейкопластыря или изоляции. Главное, чтобы лента была узкой и нерастягивающейся. Разверните эту ленту вдоль исследуемой поверхности, начиная с некоторой точки и в некотором направлении. Следите за тем, чтобы лента укладывалась на поверхность без морщин. Если лента достаточно узкая, то это возможно. Тогда лента ляжет вдоль геодезической. Таким образом, вооружившись мотком клейкой ленты, вы можете исследовать поведение геодезических на любых поверхностях. И это на самом деле увлекательное занятие. Ре-





комендуем проделать как можно больше таких экспериментов. Кстати, при помощи клейкой ленты вы можете проверить справедливость теоремы Клеро для поверхностей вращения.

**Задача 2.** Изучите поведение геодезических на цилиндре.

**Указание.** На цилиндр можно наложить не только полоску, но целиком плоскость. На листе кальки нарисуйте прямую и наверните этот лист на цилиндр.

**Задача 3.** Изучите поведение геодезических на конусе.

**Указание.** На том же самом листе кальки сделайте разрез и наверните лист на конус.

Давайте теперь отвлечемся на минуту и представим, что мы высадились на поверхность неизвестного планетоида. Наша задача — исследовать этот планетоид. В целях экономии времени мы хотим двигаться по кратчайшим путям, т. е. по геодезическим. В общем-то, мы уже знаем, как это можно сделать. Нужно взять с собой рулон линолеума и использовать его как показано на рисунке. Но можно предложить и более экономный вариант машины для движения по геодезическим. Это полый цилиндр, внутри которого находится движущийся человек. Если материал, из которого изготовлен цилиндр, обеспечивает хороший контакт с грунтом планетоида, то движение идет строго по геодезической.

### Движение по абсолютно шероховатой поверхности

При движении вдоль абсолютно гладкой поверхности кинетическая энергия тела сохраняется, так как на него не действуют никакие силы трения.

Здесь будет описан еще один классический тип движения, которое тоже идет без потери энергии.

Поверхность называется абсолютно шероховатой, если, во-первых, скорость точки контакта шарика с поверхностью в каждый момент времени равна нулю и сопротивление качению отсутствует. Во-вторых, сопротивление верчению тоже равно нулю. Первое требование означает, что шарик катится по поверхности без проскальзывания и без торможения. Чтобы разобраться со вторым условием, положим шарик на поверхность и закрутим его вокруг оси, перпендикулярной поверхности, с угловой скоростью  $\omega_b$ . Тогда шарик так и будет все время вращаться с этой скоростью, какова бы ни была сила  $F$ , прижимающая его к поверхности. Величина  $\omega_b$  называется угловой скоростью вращения.

Для начала сравним движение шарика по абсолютно гладкой и абсолютно шероховатой сферам. Мы уже знаем, что в случае абсолютной гладкости шарик движется по геодезическим, т. е. по окружностям максимального радиуса на сфере.

**Задача 4.** Пусть сфера абсолютно шероховатая и пусть в начальный момент времени скорость вращения шарика  $\omega_b$  равна нулю. Докажите, что и в этом случае движение тоже идет по окружности большого круга.

**Указание.** Смотрите указание к задаче 1.

Если  $\omega_b \neq 0$ , то движение тоже пойдет по окружности, только по окружности меньшего радиуса.

Вообще же, при движении по любой абсолютно шероховатой поверхности вращения шарик все время будет оставаться в полосе между двумя

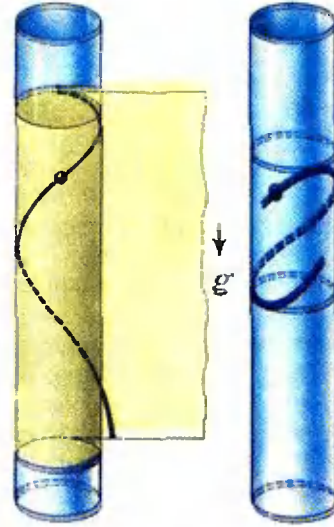


параллелями и будет попеременно касаться их. Это движение похоже на движение по геодезическим, но есть два существенных отличия. Во-первых, радиусы ограничивающих параллелей не обязательно равны. Во-вторых, касаясь противоположных параллелей, шарик может двигаться в противоположных направлениях.

Конечно, неплохо бы в дополнение к этому описанию иметь еще и инструмент, наподобие мотка клейкой ленты, который позволил бы наглядно представить траектории шарика на абсолютно шероховатой поверхности. И такой инструмент на самом деле имеется, но он немного в другом роде — это компьютер. В принципе, используя законы Ньютона движения тел и условие абсолютной шероховатости, не так уж и трудно рассчитать траекторию движения шарика.

### Вдоль цилиндра

Только что мы подчеркнули сходство между движением шарика по абсолютно гладким и абсолютно шероховатым поверхностям вращения. А сейчас приведем пример, в котором проявляется поразительное различие между этими типами движения. Будем рассматривать движение шарика внутри цилиндра и на этот раз включим силу тяжести, направив ее вдоль оси цилиндра. Чтобы наглядно представить себе в этом случае движение шарика по абсолютно гладкому цилиндру, возьмите лист кальки и нарисуйте на нем параболу. Затем намотайте этот лист на цилиндр так, чтобы ось параболы совпала с одной из прямолинейных образующих цилиндра. Намотанная на цилиндр параболы — это и есть траектория шарика



ка внутри абсолютно гладкого цилиндра. Сохраните этот лист кальки, он нам еще понадобится.

Все это выглядит достаточно естественным, но как только мы переходим к абсолютно шероховатому цилиндру, начинаются удивительные вещи. Оказывается, сила тяжести не может утащить шарик вниз — шарик будет все время двигаться по синусоидальной кривой, заключенной между двумя параллелями цилиндра. Это, конечно, неожиданный результат, и конечно, он ставит под сомнение реальное существование поверхностей, обладающих свойством абсолютной шероховатости. Но пока не будем спешить с выводами.

### Между стенками

В своей предыдущей статье «Прыгающий мячик и теория удара»\*) я рассказал о необычных свойствах известной детской игрушки — прыгающего мячика. Напомню некоторые факты оттуда. Соударение шарика с поверхностью называется абсолютно упругим, если при соударении абсолютная величина его скорости сохраняется ( $|v_+| = |v_-|$ ) и угол падения равен углу отражения. Соударение называется сверхупругим, если при соударении скорость точки контакта шарика

\*) См. «Квант» № 8 за 1990 год, с. 2.



с поверхностью меняет свой знак на противоположный ( $v_+ = -v_-$ ), а кинетическая энергия шарика сохраняется. Имеется определенная аналогия между абсолютной гладкостью и абсолютной упругостью, с одной стороны, и абсолютной шероховатостью и сверхупругостью, с другой стороны.

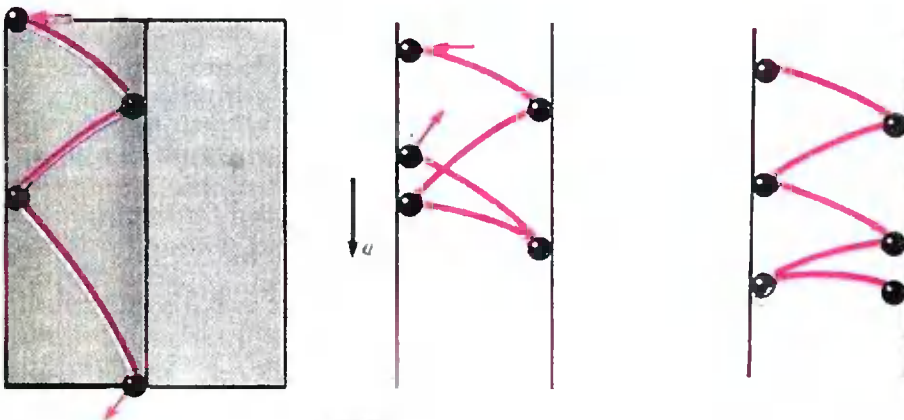
Рассмотрим случай, когда шарик движется между двумя параллельными вертикальными стенками, попеременно соударяясь с ними, и все соударения абсолютно упругие. Чтобы представить себе траекторию шарика в этом случае, проще всего воспользоваться тем самым листом кальки с нарисованной на нем параболой. Нужно только сложить этот лист гармошкой. Аналогия между этим движением и движением вдоль абсолютно гладкого цилиндра несомненна.

Пусть теперь все соударения сверхупругие. Траектория шарика в этом случае тоже состоит из кусков парабол, но на этот раз сила тяжести не может утащить шарик вниз. Вся траектория заключена в полосе, ограниченной двумя горизонтальными прямыми. И тут опять полная аналогия с движением внутри абсолютно шероховатого цилиндра. И опять воз-

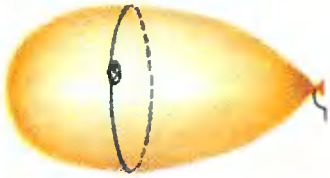
никает вопрос о существовании сверхупругих объектов. Так вот, на этот раз ответ положительный. Оказывается, что реальный прыгающий мячик обладает определенными сверхупругими свойствами. На рисунке изображена реальная траектория прыгающего мячика. Отчетливо видно, что после пятого удара скорость шарика направлена вверх. Это необычное явление подробно разобрано в статье «Прыгающий мячик и теория удара», где и показано, что прыгающий мячик — это почти сверхупругий объект.

### Воздушный шарик и монетка

Сейчас мы познакомимся еще с одним типом движения по поверхностям. Нам понадобится воздушный шарик и однокопеечная монета. Поместим монету внутрь шарика и надует его. Виболтаем шарик, как виболтаем наполненную бутылку. В какой-то момент монетка встанет на ребро и с легким шипением и свистом начнет кататься внутри шарика. Монета будет катиться достаточно долго (20—30 секунд) и пройдет порядка ста метров. За это время уже можно разобраться в ее поведении. Прежде всего, обращает на себя внимание тот факт, что уже после нескольких оборотов движение монеты стабилизируется, и она начинает двигаться по параллели максимального радиуса — мы считаем, что воздушный шарик представляет собой поверхность вращения.







Если резко изменить положение шарика, то все равно после нескольких оборотов монета возвращается на параллель максимального радиуса. Это стремление к движению по параллели максимального радиуса называется *асимптотической орбитальной устойчивостью*. Кстати, маленький стальной шарик, помещенный внутри воздушного шарика, движется точно так же, как монетка. Только он тормозится чуть быстрее.

Асимптотическая устойчивость — это совершенно новое качество, не свойственное движению ни по абсолютно гладкой, ни по абсолютно шероховатой поверхностям. И в том, и в другом случае движение по максимальной параллели — это одно из возможных движений. Однако рассмотрим следующую задачу.

**Задача 5.** Докажите, что движение по максимальной параллели не обладает асимптотической орбитальной устойчивостью ни для абсолютно гладкой, ни для абсолютно шероховатой поверхностей вращения.

**Указание.** Рассмотрите движение, идущее под небольшим углом к параллели максимального радиуса, и учтите, что оно все время будет фиксированными параллелями.

Имеется еще один замечательный факт, который можно обнаружить в этом эксперименте. Будем сжимать воздушный шарик вдоль его оси. При некоторой степени сжатия теряется асимптотическая устойчивость движения по максимальной параллели — монета сходит с этой параллели и уже не стремится вернуться обратно. Можно предположить, что потеря устойчивости происходит в тот момент, когда в процессе сжатия шарик принимает форму сферы.

**Задача 6.** Пусть монетка движется по окружности большого радиуса

внутри воздушного шарика, имеющего форму сферы. Докажите, что это движение не обладает свойством асимптотической устойчивости.

**Указание.** Движение по этой большой окружности ничем не лучше движения по любой другой большой окружности. В том числе и по окружности, идущей под небольшим углом к исходной.

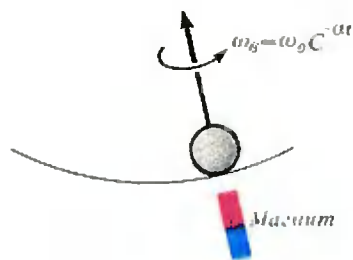
Итак, перед нами совершенно новый тип движения с необычным поведением траекторий. Чтобы дать его описание, аналогичное описанию абсолютно гладкого или абсолютно шероховатого движения, необходимо перейти от языка траекторий к языку взаимодействия монетки или стального шарика с резиновой пленкой.

### Математическая модель

В нашем эксперименте монетка движется вдоль максимальной параллели без проскальзывания и достаточно долго, т. е. сопротивление ее качению мало. Поэтому, как и в случае абсолютной шероховатости, можно принять, что сопротивление качению равно нулю. Проведем дополнительный эксперимент: щелчком закрутим монеты на гладкой поверхности стола и на резиновой пленке от шарика. В первом случае монета вертится долго, во втором — буквально после нескольких оборотов падает. Это показывает, что мы уже не можем пренебречь трением вращения.

Наконец, для простоты заменим монетку стальным шариком, и модель взаимодействия с резиновой пленкой практически готова. А именно, можно считать, что при движении шарика по резиновой пленке, во-первых, шарик катится без проскальзывания и тор-





можения. Во-вторых, скорость вращения  $\omega_s$  шарика, поставленного на резиновую пленку, быстро убывает, например по закону  $\omega_s = \omega_0 e^{-\alpha t}$ , где  $\alpha$  — положительная постоянная. Простые расчеты показывают, что эта модель дает, по крайней мере, качественное согласие с экспериментом. Для вытянутых поверхностей движение по максимальной параллели действительно асимптотически устойчиво. А при переходе через сферическую поверхность к сплюснутым максимальная параллель резко меняет положение и теряет свойство асимптотической устойчивости.

### Снова от движения к удару, или от монетки к лазеру

И в эксперименте с монеткой наблюдается удивительное сходство между движением по поверхности и ударом. Уже упоминалось о том, что замена монетки на маленький стальной шарик существенно не меняет характера движения. Однако, когда стальной шарик после потери скорости отрывается от поверхности, он начинает подпрыгивать, соударяясь с резиновой пленкой. И можно заметить, что потери энергии при этих соударениях достаточно малы — после удара шарик поднимается почти на ту же высоту, с какой он падал. Конечно, воздушный шарик, да еще когда его держишь в

руках, это недостаточно жесткая конструкция. Чтобы уменьшить потери энергии при соударении, ее нужно заменить на более жесткую. В качестве такой конструкции я выбрал стеклянную банку с натянутой на нее резиновой пленкой. В самом деле, потери энергии резко уменьшились. К сожалению, многократно соударяясь с плоской пленкой, шарик быстро уходил от ее центра, наткнулся на стенки и прекращал свое движение. Нашелся выход и из этого положения. Поскольку эти эксперименты происходили зимой, банка с натянутой пленкой и шариком внутри ставилась на батарею, воздух внутри нее расширялся и пленка выгибалась наружу. Выпуклая пленка оказывала фокусирующее влияние на движение шарика, и все соударения происходили вблизи ее центра. Однако совсем не обязательно слепо копировать первоначальный эксперимент и заставлять шарик двигаться внутри банки. Оказалось, что еще проще поставить банку на стол и бросать шарик на пленку сверху. Так эксперимент приобрел окончательный вид.

Итак, на стеклянную банку натяните кусок резиновой пленки. Продавите пленку, чтобы из-под нее вышло немного воздуха и она прогнулась внутрь. Зафиксируйте пленку на банке резиновым колышком. Отпустите теперь шарик с небольшой высоты по центру пленки. При соответствующем подборе банки, пленки и шарика соударения могут продолжаться очень долго — более минуты. Простые расчеты (опять смотрите «Прыгающий мячик...») показывают, что в этом случае потери энергии при каждом соударении составляют менее одного процента. Это очень малые потери. Они сравнимы, например, с потерями энергии при отражении светового потока



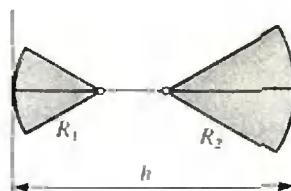
от специальных зеркал, применяемых в лазерной технике.

Наконец, последнее видоизменение эксперимента. Снова отключим силу тяжести, возьмем две такие банки, расположим их друг против друга и заставим шарик двигаться между ними. Это устройство очень точно моделирует работу лазерного резонатора, в котором световой поток движется между двумя отражающими зеркалами.

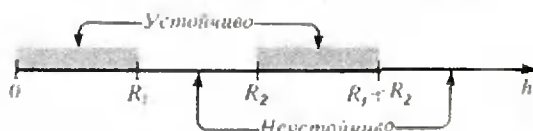
### Устойчивость

В эксперименте с шариком, падающим на пленку, наблюдается замечательное явление. Если начальная высота  $h$ , с которой падает шарик, достаточно мала, то все соударения происходят вблизи центра пленки. Если же начальная высота  $h$  больше некоторой критической высоты  $h_{кр}$ , то движение шарика становится неустойчивым — после двух-трех соударений шарик выскакивает за пределы пленки. Используя модель абсолютно упругих соударений, можно рассчитать, что высота  $h_{кр}$  совпадает с высотой «оптического фокуса» поверхности пленки. Это высота, на которой фокусируется после отражения пучок световых лучей, направленный вдоль оси пленки.

Та же самая задача об устойчивости возникает при анализе работы нашей механической модели лазерного резонатора. Будем считать, что отражаю-



щие пленки — это сферические поверхности с радиусами  $R_1$  и  $R_2$ ,  $R_1 < R_2$ . Тут нужно выяснить, для каких расстояний  $h$  между отражающими поверхностями шарик будет устойчиво двигаться вдоль их общей оси и для каких расстояний  $h$  он после нескольких соударений будет выбрасываться из пространства между пленками. Ответ довольно неожиданный.

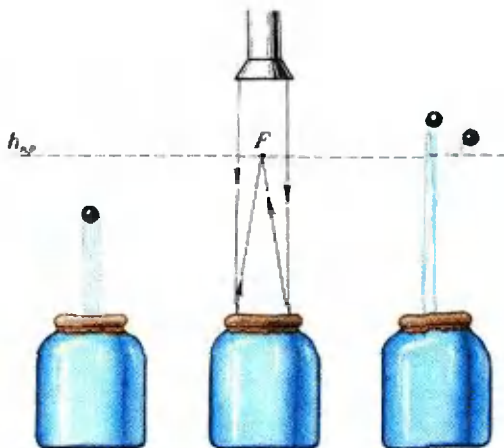


Оказывается, что существуют две зоны устойчивости: если  $0 \leq h < R_1$  или  $R_2 < h < R_1 + R_2$ . Если же  $R_1 \leq h \leq R_2$  или  $h \geq R_1 + R_2$ , то движение будет неустойчивым.

### Заключение

Несколько слов о том, о чем следовало бы сказать подробнее. Прежде всего о воздушном шарике и монетке. Мы далеко не исчерпали всех удивительных свойств этой потрясающей игрушки. Например, если раскрутить монетку и установить ось шарика вертикально, то, постоянно теряя скорость, монетка будет опускаться вниз. При этом возникают замечательные резонансные явления. При определенных положениях монеты (на определенных высотах) шарик начинает звучать. Причем четко выделяются узкие зоны, в которых это звучание происходит. Это явление несомненно нуждается в исследовании.

Теперь о другой игрушке — о механической модели лазерного резонатора. Задача об устойчивости резонатора и, вообще, задача о поведении шарика внутри резонатора относятся



(Окончание см. на с. 43)



# ФОРМУЛА РОЖДЕНИЯ ЗВЕЗД

Кандидат физико-математических наук  
В. СУРДИН,

кандидат физико-математических наук  
С. ЛАМЗИН

*Тот, кто решается толковать об эволюции звезд, должен быть оптимистом и обладать чувством юмора. Астрономы и являются неисправимыми оптимистами.*

Цецилия Пэйи-Гапошкина,  
американский астроном

Англия. Начало XX века. Джеймс Хопвуд Джинс (1877—1946), блестяще закончивший Кембриджский университет, в течение нескольких лет выполняет серию выдающихся работ по разным разделам теоретической физики: он публикует монографию по кинетической теории газов, исследования по молекулярной физике и теории излучения. В эти же годы под влиянием профессора астрономии и физики Кембриджского университета Джорджа Дарвина (1845—1912) — сына знаменитого биолога Чарлза Дарвина — Джеймс Джинс выполняет серию работ по теоретической астрофизике. Среди них была и фундаментальная работа «Устойчивость сферической туманности», опубликованная в 1902 г. в «Сообщениях Лондонского королевского общества».

Эта работа о поведении газовых уплотнений под действием собственной силы гравитации стала фундаментом современной теории гравитационной неустойчивости, которая объясняет происхождение практически всех структурных элементов Вселенной — от галактик и их скоплений до звезд, планет и их спутников. Характерные размеры и массы гравитационно-неустойчивых газовых уплотнений астрофизики называют теперь джинсовскими и отмечают индексом  $J$  (от James Jeans). Например,  $M_J$  — джинсовская масса,  $R_J$  — джинсовский радиус.

Вообще, Дж. Дарвин мог гордиться тем, что привлек внимание молодого Джинса к астрономии: его подопечный сделал очень многое для развития космогонии и звездной динамики. Но мог ли предполагать Дж. Дарвин, занимавший в 1899—1900 гг. пост президента Королевского астрономического общества в Лондоне, что через четверть века на эту почетную должность вступит Дж. Джинс и в память о своем наставнике учредит ежегодные Дарвиновские лекции? Впрочем, связь между Дарвином и Джинсом оказалась еще более глубокой. Дарвин, как известно, прославился изучением приливов и фигур вращающихся жидких тел. Джинс продолжил исследования космогонической роли приливных явлений и даже разработал приливную теорию происхождения Солнечной системы, очень модную в первой половине XX века. В этой теории рождение планетной системы рассматривается как редчайший факт, вызванный близким пролетом рядом с Солнцем другой звезды, вырвавшей из оболочки Солнца сгусток протопланетного вещества. И хотя в отношении Солнечной системы эту гипотезу вспоминают сейчас лишь как исторический факт, сам механизм приливного взаимодействия несомненно играет большую роль в мире галактик, звездных скоплений и, возможно, при формировании звезд — на так называемой протозвездной стадии их эволюции.

Вернемся к главному делу Джинса — к его теории гравитационной неустойчивости. После того как в начале XX века Дж. Джинс заложил ее фундамент, астрономам понадобилось еще 70 лет для обнаружения именно той компоненты межзвездной

среды, которая непосредственно связана с формированием звезд и в приложении к которой теория Джинса правильно предсказывает параметры новорожденных звезд. Для нынешней динамично развивающейся науки такая глубина теоретического предсказания необычайно велика. Давайте познакомимся с основами этой теории.

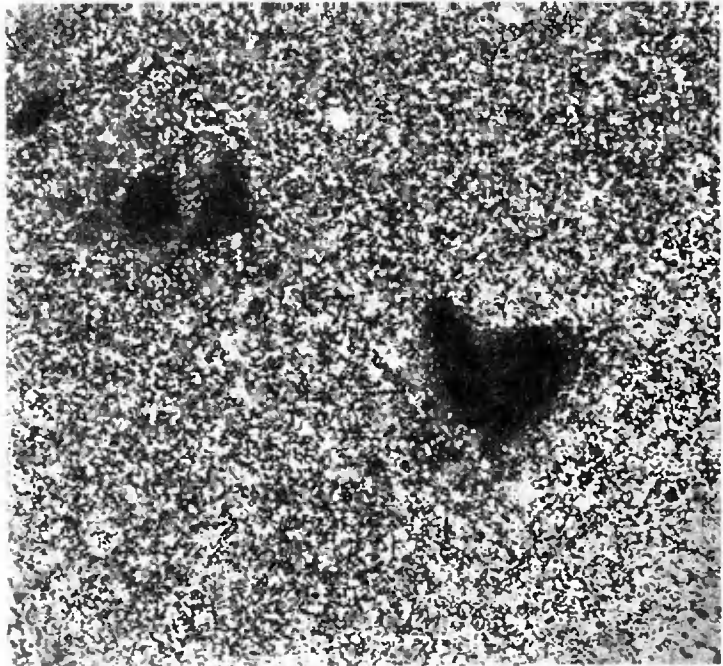
Она берет начало от Исаака Ньютона. Через 5 лет после того, как великий физик опубликовал свой закон тяготения, его друг — преподобный Ричард Бентли, стоявший тогда во главе Тринити-колледжа в Кембридже, — спросил в письме к Ньютону о том, не может ли быть только что открытая сила тяготения причиной образования звезд (вопрос, достойный того, чтобы считать Бентли соавтором теории гравитационной неустойчивости). Ньютон письмом от 10 декабря 1692 г. ответил ему следующее:

«Мне кажется, что если бы все вещество нашего Солнца и планет и все вещество Вселенной было бы равномерно рассеяно в небесных глубинах, и если бы каждая частица имела врожденное тяготение ко всем остальным, и если бы, наконец, пространство, в котором была бы рассеяна эта

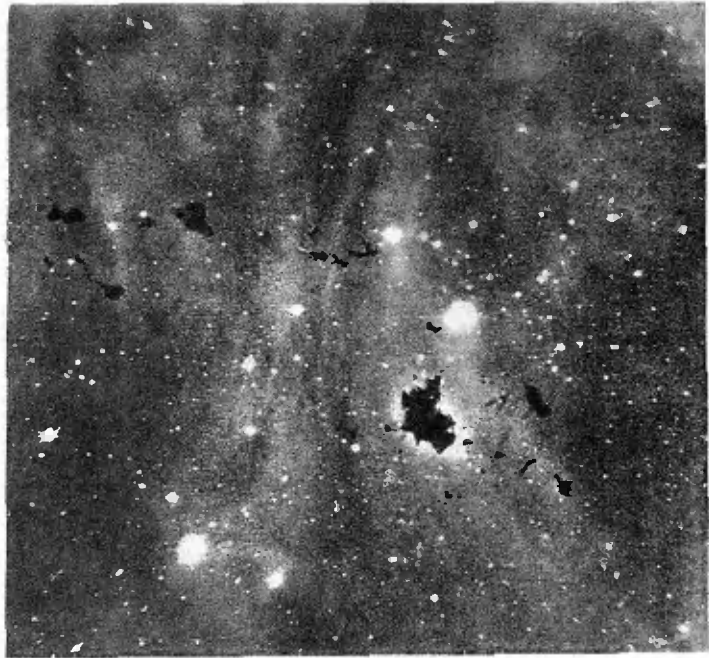
материя, было бы конечным, вещество снаружи этого пространства благодаря указанному тяготению влеклось бы ко всему веществу внутри и вследствие этого упало бы в середину всего пространства и образовало бы там одну огромную сферическую массу. Однако, если бы это вещество было равномерно распределено по бесконечному пространству, оно никогда не могло бы объединиться в одну массу, но часть его сгущалась бы тут, а другая там, образуя бесконечное число огромных масс, разбросанных на огромных расстояниях друг от друга по всему этому бесконечному пространству. Именно так могли образоваться и Солнце, и неподвижные звезды, если предположить, что вещество было светящимся по своей природе».

Как видим, Ньютон, развивая идею о гравитационной конденсации первичного вещества, предполагал это вещество совершенно инертным, холодным, не сопротивляющимся гравитации. Поэтому он считал, что любая неоднородность плотности должна прогрессивно сжиматься и уплотняться силой тяжести. К концу XIX века физики уже ясно понимали, что всякое вещество, в том числе и разре-

*Великий исследователь звезд Вильям Гершель (1738—1822) называл эти темные беззвездные области «дырами в небесах». Теперь мы знаем, что это плотные облака межзвездного газа и пыли, сквозь которые не проникает свет далеких звезд.*



На этой фотографии хорошо видно, что плотные темные облака межзвездного газа выделяются из разреженной, заполняющей все межзвездное пространство газообразной среды, которая светится под действием погруженных в нее горячих звезд.



женный газ, обладает упругостью: именно это свойство газа позволяет распространяться в нем звуковым волнам. Поэтому Джинс заключил, что гравитационное сжатие может начаться лишь в том случае, если сила тяжести победит силу газового давления.

Чтобы понять, при каких условиях это происходит, сделаем несколько простых физических оценок. Давайте рассмотрим, какие процессы происходят при небольшом случайном сжатии некоторого объема газа с характерным размером  $\lambda$  и плотностью  $\rho$ . С одной стороны, сила гравитации стремится продолжить это сжатие. Если бы газовое давление вообще отсутствовало, то все вещество этого облака упало бы к его центру за время свободного падения

$$t_n \sim (G\rho)^{-1/2},$$

которое, как видим, не зависит от размера возмущений.

Пояснить эту формулу можно с помощью третьего закона Кеплера. Падение любой частицы к центру облака происходит под действием силы притяжения к массе  $M \sim \rho a^3$ , где  $a$  — начальное расстояние от частицы до центра. Время падения представляет собой половину периода движения по очень узкому

эллипсу, в одном из фокусов которого находится центр облака. Но, по третьему закону Кеплера, период движения по эллипсу с большой осью  $a$  равен периоду движения вокруг массы  $M$  по круговой орбите с радиусом  $a/2$ . Период такого кругового движения легко вычислить из второго закона Ньютона.

С другой стороны, при отсутствии гравитации сила газового давления заставила бы облако расширяться за «динамическое время», которое можно оценить следующим образом:

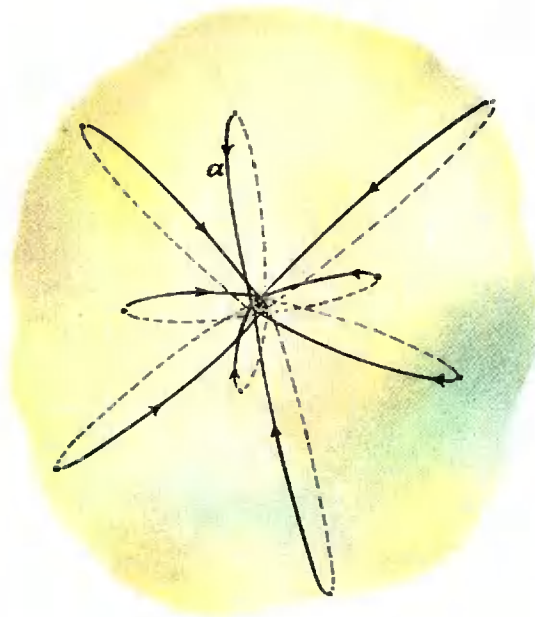
$$t_d \sim \frac{\lambda}{v_{зв}},$$

где  $v_{зв}$  — скорость звука в газе, которая по порядку величины равна скорости движения молекул газа:

$$v_{зв} \sim \sqrt{\frac{RT}{\mu}}.$$

Ясно, что если  $t_d \ll t_n$ , то газовое давление успеет перераспределить вещество таким образом, чтобы воспрепятствовать его дальнейшему гравитационному сжатию. Наоборот, если  $t_n \ll t_d$ , то гравитационное сжатие произойдет быстрее, чем сработают силы газового давления. Найдем отношение  $t_d$  и  $t_n$ :

$$\frac{t_d}{t_n} \sim \frac{\lambda}{(G\rho)^{-1/2} v_{зв}} = \frac{\lambda}{(RT/G\rho\mu)^{1/2}}.$$



Свободное сжатие облака под действием собственной гравитации можно представить как движение всех его частиц по сильно вытянутым эллиптическим орбитам, для которых справедливы законы Кеплера.

Видно, что возмущения малого масштаба ( $\lambda \ll (RT/G\rho\mu)^{1/2}$ ) являются устойчивыми по отношению к случайному сжатию, а крупномасштабные возмущения ( $\lambda \gg (RT/G\rho\mu)^{1/2}$ ) неустойчивы: случайно возникнув, они уже не смогут вновь расширяться.

Наши рассуждения позволили нам оценить и величину критического размера  $\lambda_J$ :

$$\lambda_J \sim \left( \frac{RT}{G\rho\mu} \right)^{1/2},$$

из которого легко получить оценку для критической массы  $M_J$ :

$$M_J \sim \rho \lambda_J^3 \sim \left( \frac{RT}{G\mu} \right)^{3/2} \rho^{-1/2}.$$

Последние две формулы представляют собой (с точностью до численных множителей) знаменитые формулы Джинса.

Чтобы лучше почувствовать смысл этих результатов, получим их еще раз из условия равновесия газового облака под действием сил давления и тяготения, которое, по определению

$\lambda_J$  и  $M_J$ , наступает как раз при  $\lambda = \lambda_J$  и  $M = M_J$ . Характерное значение ускорения свободного падения в облаке равно по порядку величины

$$g \sim G \frac{M}{\lambda^2} \sim G\rho\lambda.$$

Давление газа должно уравновесить силу тяготения; оно равно нулю на внешнем краю облака и должно достигать в его толще значения

$$p \sim \rho g \lambda \sim G\rho^2 \lambda^2$$

(вспомните формулу для давления столба жидкости  $p = \rho gh$ ). Выразив  $p$  из уравнения состояния:

$$p = \frac{\rho RT}{\mu},$$

получим для  $\lambda_J$  и  $M_J \sim \rho \lambda_J^3$  такие же значения, как и раньше. Используя математику в большем объеме, несложно получить точные значения  $\lambda_J$  и  $M_J$ , которые здесь мы приведем без доказательства:

$$\lambda_J = \left( \frac{2RT}{G\rho\mu} \right)^{1/2}, \quad M_J = \left( \frac{RT}{2G\mu} \right)^{3/2} \rho^{-1/2}.$$

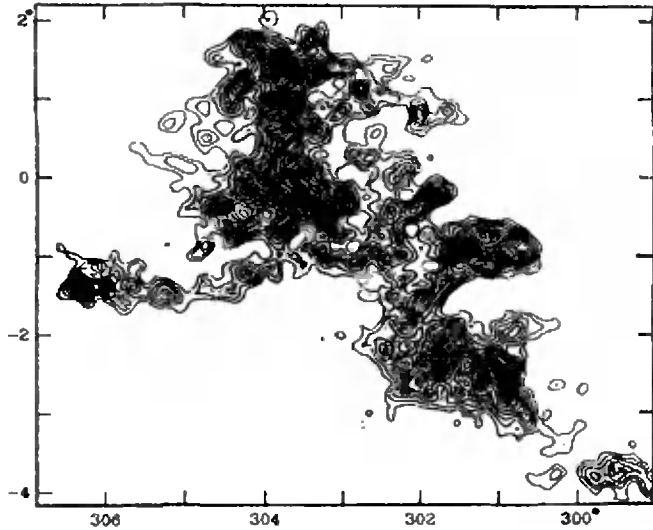
На этих простых формулах покоится теория гравитационной неустойчивости. Из нее следует, что если в газообразной среде в силу каких-то причин возникают возмущения плотности различного масштаба, то те из них, масса которых превышает  $M_J$ , должны неуклонно сжиматься и уплотняться. Обычно возмущения плотности малых масштабов по своему числу и плотности преобладают над крупномасштабными. Поэтому наиболее вероятно, что гравитационной неустойчивости в первую очередь подвергнутся возмущения с массой  $M \approx M_J$ .

Спустя 240 лет после письма Ньютона к Бенгли другой англичанин — Джеймс Джинс, написал в своей книге «Звезды в их развитии» (в русском переводе — «Движение миров», М.: Гостехиздат, 1933):

«Предположим, что в начале времен все пространство было заполнено газом... Тогда можно доказать, что газ не оставался бы равномерно



Радиокарта огромного межзвездного облака, получившего за свою оптическую непрозрачность название Южный Угольный Мешок. Линии оконтуривают области равной плотности. Хорошо видно, что облако разделилось на множество плотных конденсаций, массы которых, как показывают вычисления, близки к джинсовской массе.



распределенным в пространстве, а немедленно стал бы собираться в шары. Мы можем вычислить, сколько газа потребуется для образования каждого шара».

К сожалению, Джинс немного преувеличил свои возможности: он не мог достаточно убедительно доказать работоспособность своих формул, поскольку в то время почти ничего не было известно о физических свойствах и составе межзвездного газа, из которого формируются звезды. Однако теперь мы можем это сделать.

Наблюдения астрономов показали, что химический состав звезд и межзвездного газа отличается большей стабильностью: на 1000 атомов водорода приходится около 100 атомов гелия и 2—3 атома других, более тяжелых элементов. В плотных холодных облаках, в которых формируются звезды, водород находится в форме молекул  $H_2$  и его молярная масса  $\mu(H_2) = 2$  г/моль. А с учетом всех других химических элементов средняя молярная масса межзвездного газа составляет  $\mu_{cp} = 2,3$  г/моль.

Плотность межзвездного газа  $\rho = (\mu_{cp}/N_A)n$  астрономы предпочитают выражать через концентрацию молекулярного водорода  $n(H_2)$ . С учетом состава межзвездного газа получаем

$n = 1,1n(H_2)$ . Подставляя  $\rho$ ,  $n$  в формулы Джинса, перепишем их в более современном виде:

$$\lambda_J = 3,2 \cdot 10^4 \text{ а. е.} \left( \frac{T}{10\text{К}} \frac{10^4 \text{ см}^{-3}}{n(H_2)} \right)^{1/2},$$

$$M_J = 0,3M_{\odot} \left( \frac{T}{10\text{К}} \right)^{3/2} \left( \frac{10^4 \text{ см}^{-3}}{n(H_2)} \right)^{1/2}$$

Здесь  $M_{\odot} = 2 \cdot 10^{30}$  кг — масса Солнца, а. е. — астрономическая единица, равная расстоянию от Земли до Солнца ( $1 \text{ а. е.} = 1,5 \cdot 10^{13}$  см). В последние годы стало известно, что типичными местами формирования звезд являются мелкомасштабные конденсации в межзвездных молекулярных облаках, где температура  $T = 5 - 20\text{К}$  и концентрация водорода  $n(H_2) \approx 10^4 - 10^6 \text{ см}^{-3}$ . Для этих значений  $M_J = (0,02 - 2)M_{\odot}$ . Действительно, массы большинства звезд заключены в этом диапазоне. Теория Джинса верна!

Еще одним тестом для этой теории может служить размер облака — предка звезд. Для Солнечной системы этот размер оценивается из наблюдений в  $10^4$  а. е.: именно таков радиус плотной внутренней части облака Оорта, в котором сосредоточена основная масса кометных ядер. А что предсказывает на этот счет теория Джинса?



*Инфракрасное изображение центральной части плотного облака в созвездии Ориона. Яркие точки — сжимающиеся протозвезды и очень молодые звезды, окруженные газопылевыми оболочками. Светлые размытые пятна — еще недостаточно уплотнившиеся газовые фрагменты.*

Радиусом газового фрагмента в момент наступления его гравитационной неустойчивости естественно считать величину  $R_j = \lambda_j / 4$ . Исходя из того, что масса фрагмента должна быть равна массе Солнца, и принимая  $T \approx 20$  К, получим  $n(\text{H}_2) = 10^4 \text{ см}^{-3}$  и  $R_j = 10^4$  а. е. Действительно, это исходный радиус облака Оорта! Нужны ли

*Знаменитая темная туманность Конская голова в созвездии Ориона. В нижней половине фотографии — темное облако (Конская голова — его часть). В верхней половине — молодые звезды и разогретые ими остатки газа, из которых эти звезды сформировались.*



еще доказательства справедливости теории Джинса?

Разумеется, простые формулы Джинса не учитывают многих физических процессов, происходящих в межзвездной среде. Эти формулы верны для идеального покоящегося однородного газа, который в природе нигде не встретишь. Реальное межзвездное вещество пребывает в постоянном движении, скорость которого часто превосходит скорость звука; оно испытывает сильное влияние магнитного поля, притяжение к звездам Галактики и лучевое давление со стороны наиболее ярких из них. Поэтому многие физики после Джинса брались за уточнение и развитие теории гравитационной неустойчивости. Отметим среди них Е. М. Лифшица, С. Чандрасекара, Я. Б. Зельдовича и Дж. Силка. Сейчас эта теория развита вполне детально: она учитывает расширение и вращение газовой среды, ее взаимодействие с магнитным полем и с другими источниками гравитации. Важно, однако, что учет дополнительных физических факторов не изменил принципиально выводы теории: значения джинсовской массы и джинсовского радиуса до сих пор используются в большинстве работ по оценке эффектов гравитационной неустойчивости. Отчасти это связано с тем,

что из наблюдений редко удается получить иные характеристики протозвездной среды, кроме ее плотности и температуры.

Сам Дж. Джинс был чрезвычайно воодушевлен результатом своих исследований и, прежде всего, их наглядностью и простотой. Он писал: «...для нас ясно, почему все звезды имеют очень сходный вес; это потому, что все они образованы одинаковым процессом. Они, пожалуй, похожи на фабричные изделия, сделанные одною и тою же машиной». Зная сегодня, что звезды различаются по массе в тысячи раз, а условия в межзвездной среде — еще сильнее, мы вправе назвать оптимизм Джинса преждевременным. Да он и сам понимал, что пройден лишь первый рубеж и, предвидя грядущие трудности, с которыми столкнется теория формирования звезд и галактик, предупреждал: «При современном состоянии наших знаний любая попытка диктовать окончательные решения по основным проблемам космогонии была бы ни



*Газопылевой комплекс вблизи звезды  $\rho$  Змееносца, в котором хорошо видны яркие недавно родившиеся звезды, разогретый ими разреженный газ и несколько темных плотных конденсаций, которым еще предстоит стать звездами.*

чем иным, как чистым догматизмом». За прошедший, без малого, век мы многое узнали о формировании звезд и, главное, убедились в том, что теория гравитационной неустойчивости Дж. Джинса выдержала проверку временем.

## Информация

### Заочная аэрокосмическая школа

Заочная аэрокосмическая школа (ЗАКШ), организованная Всесоюзным молодежным аэрокосмическим обществом (ВАКО) «Союз» и Московским физико-техническим институтом (МФТИ), проводит конкурсный набор учащихся в 10 и 11 классы на 1992—93 учебный год.

Пособия ЗАКШ подготовлены сотрудниками и аспирантами МФТИ и призваны помочь всем, кто собирается поступать в вузы, особенно аэрокосмического профиля. Программа школы охватывает следующие разделы науки и техники:

- Движение космических аппаратов
- Ракетная техника
- Движение в атмосфере
- Исследования Земли из космоса
- Исследования Космоса
- Перспективная космонавтика.

В течение года учащиеся ЗАКШ получают:

- шесть заданий школы, включающие

теоретический материал, список литературы для дальнейшего знакомства с направлениями аэрокосмической физики и задачи для самостоятельного решения;

— «Космическую хронику ЗАКШ», состоящую из дневника наиболее значительных событий в космонавтике текущего года и информационных материалов по истории и современному состоянию космических исследований.

Полный курс обучения в ЗАКШ — 2 года. Учащиеся, поступающие в 11 класс, имеют возможность окончить школу по сокращенной программе.

Конкурсный набор в школу проводится с целью зачисления учащихся на бесплатную форму обучения. Не прошедшие конкурса могут стать учениками по платной форме обучения. Кроме того, школа распространяет среди желающих «Космическую хронику ЗАКШ» текущего года за небольшую плату. Все необходимые сведения по этому вопросу будут сообщены при условии получения приемной комиссией решения вступительного задания.

Вступительное задание для участия в конкурсе (решение задач по физике) необходимо выполнить на русском языке

*(Окончание см. на с. 37)*

# Задачник „Кванта“

## Задачи

M1311 — M1315, Ф1318 — Ф1322

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 января 1992 года по адресу: 103008, Москва К-8, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 11—91» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M1311» или «Ф1318». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь. Задачи M1311 — M1315 предлагались в этом году на Ленинградской городской олимпиаде по математике, задача Ф1320 — на физической олимпиаде Великобритании, а Ф1322 — на Всероссийской олимпиаде по физике.

**M1311.** Треугольник имеет целые длины сторон  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , причем известно, что длина одной из его высот равна сумме длин двух других высот. Докажите, что  $x^2 + y^2 + z^2$  — квадрат целого числа.

Д. Фокин

**M1312.** Поля доски  $n \times n$  раскрашены в три цвета — синий, белый, красный, причем известно, что рядом с каждой синей клеткой есть (граничащая по стороне) белая, рядом с белой — красная и рядом с красной — синяя. Докажите для количества  $k$  клеток одного — скажем, красного — цвета оценки: а)  $k \leq 2n^2/3$ ; б)  $k \geq n^2/11$

Ф. Назаров

**M1313.** Найдите 8 натуральных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_8$  таких, что

$$\sqrt{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_1 - 1}} + \sqrt{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_2 - 1}} + \dots \\ \dots + \sqrt{\sqrt{a_8} - \sqrt{a_8 - 1}} = 2.$$

Л. Курляндчик

**M1314.** Диагонали выпуклого четырехугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $M$ , а  $P$  и  $Q$  — центры вписанных окружностей треугольников  $ABM$  и  $CDM$ . Докажите, что

$$FD + CD < 4PQ.$$

Ф. Назаров

**M1315.** На окружности расставляются целые числа. Разрешается стереть любое четное число, а вместо двух соседних с ним чисел записать их сумму (отчего количество чисел уменьшается на два). Такие операции проводятся, пока это возможно, т. е. пока не останется ни одного четного числа, либо останется одно или два числа. Докажите, что количество оставшихся чисел зависит лишь от исходной расстановки, но не от порядка действий.

Д. Фокин

# Задачник „Квант“

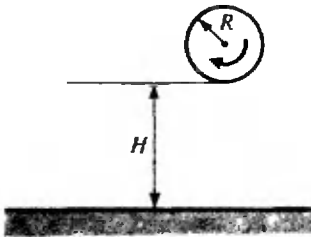


Рис. 1.

**Ф1318.** Велосипедное колесо, отпущенное с высоты  $H=1$  м (рис. 1), подпрыгивает на высоту  $h=0,8$  м. Закрутим теперь колесо до скорости  $\omega=2$  об/с и отпустим с той же высоты. Под каким углом к вертикали оно отскочит от пола? А если увеличить скорость вращения в 2 раза? Еще в 2 раза? Коэффициент трения о горизонтальную поверхность  $\mu=0,7$ , радиус колеса  $R=0,5$  м.

О. Кубицкий

**Ф1319.** Стальную струну диаметром  $d=1$  мм и длиной  $l=1$  м натянули и закрепили ее концы на одной высоте. К середине струны прикрепили груз массой  $M=1$  кг. Найдите «провис» струны. Каким он станет, если уменьшить температуру на  $\Delta T=1$  К? Модуль Юнга для стали  $E=2 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>, коэффициент линейного расширения  $\alpha=1,2 \cdot 10^{-5}$  К<sup>-1</sup>. Расстояние между точками подвеса не меняется.

З. Рафаилов

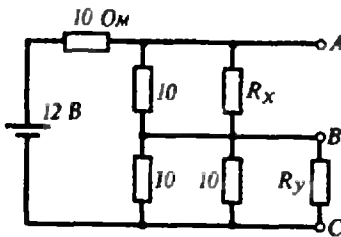


Рис. 2.

**Ф1320.** В схеме, изображенной на рисунке 2, батарея идеальная, а резисторы — кроме  $R_x$  и  $R_y$  — имеют сопротивления по 10 Ом. Напряжение между точками А и В составляет 4 В, а между В и С — 2 В. Найдите величины  $R_x$  и  $R_y$ .

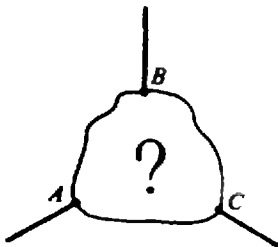


Рис. 3.

**Ф1321.** В «черном ящике» с тремя выводами (рис. 3) находится схема, состоящая из резистора сопротивлением  $R=100$  Ом, катушки индуктивности и конденсатора. При измерениях на переменном токе ( $\omega=1000$  с<sup>-1</sup>) были определены значения сопротивлений  $R_{AB}=75$  Ом и  $R_{BC}=125$  Ом. Может ли индуктивность катушки быть равной 1 Гн? Ответ обоснуйте схемами и расчетом. На данной частоте катушку и конденсатор считайте идеальными.

А. Зильберман

**Ф1322.** Космический корабль совершает перелет от Земли к Марсу по орбите Гоманна — Цандера (перигелий этой орбиты находится на орбите Земли, а афелий — на орбите Марса). Найдите время этого перелета, а также минимальное время, в течение которого космонавтам придется ожидать на Марсе момента отправления в обратный путь по той же орбите. Период обращения Земли вокруг Солнца равен  $T_3=365,25$  суток, Марса —  $T_M=687$  суток. Орбиты планет считайте круговыми и лежащими в одной плоскости.

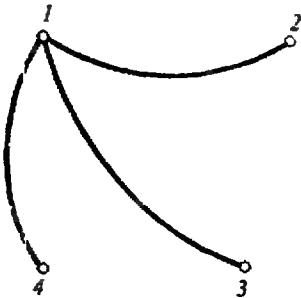
М. Гаврилов

# Задачник „Кванта“

## Решения задач

M1286 — M1290, Ф1298 — Ф1302

**M1286.** На конгрессе присутствуют 100 делегатов, каждый из которых знает несколько иностранных языков. Известно, что любые трое могут поговорить между собой без помощи остальных. Докажите, что делегатов можно поселить в 50-ти двухместных номерах так, что живущие в одном номере могут разговаривать между собой.



**M1287.** В параллелограмме  $ABCD$  диагональ  $AC$  больше диагонали  $BD$ . Точка  $M$  на диагонали  $AC$  такова, что около четырехугольника  $BCMD$  можно описать окружность. Докажите, что  $BD$  — общая касательная окружностей, описанных около треугольников  $ABM$  и  $ADM$ .

**M1288.** Докажите, что число  $235^2 + 972^2$  — составное.

Докажем по индукции более общее утверждение — про  $2n$  делегатов и  $n$  двухместных номеров,  $n \geq 2$ .

Естественно изображать ситуацию в виде графа — системы точек (изображающих делегатов), некоторые пары которых соединены ребром (а именно, те пары делегатов, которые могут разговаривать друг с другом).

Для 4-х делегатов ( $n=2$ ) утверждение проверяется некоторым перебором. Если 1, 2, 3, 4 — делегаты (вершины графа), из которых каждый может поговорить хоть с одним из остальных, но при этом их нельзя поселить в двух двухместных номерах с соблюдением условий (т. е. в графе отсутствует одно из ребер 12 или 34, а также одно из ребер 13 или 24 и ребро 14 или 23), то остается возможным лишь случай, соответствующий графу, состоящему из трех ребер, выходящих из одной вершины (см. рисунок), что противоречит условию.

Переход от  $n$  к  $n+1$  очевиден. Предположим, что для  $2n$  делегатов утверждение доказано, и докажем его для  $2n+2$ . Можно выбрать любую пару из них, знающую общий язык, и поселить в один номер. А остальных  $2n$  делегатов, по предположению индукции, можно расселить в  $n$  номерах в соответствии с условием задачи.

Д. Фомин

Чтобы доказать это утверждение для окружности, описанной около треугольника  $ABM$ , достаточно проверить равенство углов  $\angle MBD$  и  $\angle BAM$ . Но поскольку четырехугольник  $BCMD$  вписан в окружность,  $\angle BAM = \angle MOD = \angle MBD$ . Для другой окружности доказательство аналогично.

Д. Фомин

Эта сумма равна  $1\,000\,009 = 3^2 + 1000^2$ . Докажем такой общий факт. Если число  $m$  вида  $4k+1$  ( $k$  — натуральное) можно представить в виде суммы двух квадратов не менее чем двумя разными способами, то  $m$  — составное.

Пусть

$$m = x^2 + y^2 = u^2 + v^2, \quad (1)$$

где можно считать числа  $x > u$  нечетными, а  $y < v$  — четными. Тогда наибольший общий делитель чисел

# Задачник „Кванта“

$x-u$  и  $v-y$  — четное число; обозначим его  $2d$ . Пусть

$$x = u - 2da, \quad v = y - 2db, \quad (2)$$

где  $a$  и  $b$  взаимно просты. Подставив выражения (2) в (1), получим после сокращений

$$au + da^2 = by + db^2 = abc. \quad (3)$$

Это число делится на  $a$  и на  $b$ , а значит, и на их произведение; частное мы обозначили через  $c$ . Таким образом, как следует из (3),  $u = bc - ad$ ,  $y = ac - bd$ , откуда  $x = u + 2ad = bc + ad$  (здесь  $a, b, c, d$  — некоторые натуральные числа) и

$$m = x^2 + y^2 = (bc + ad)^2 + (ac - bd)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2).$$

Проделав эти выкладки для данных чисел, нетрудно найти соответствующее разложение и для числа  $10^6 + 9$ .

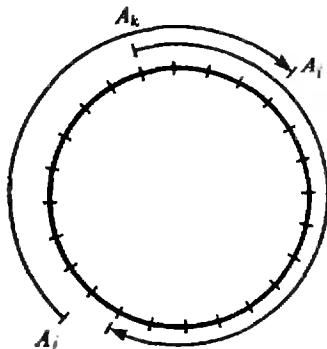
Можно доказать и более сильное утверждение: число  $m = 4k + 1$  простое в том и только в том случае, если оно представляется в виде суммы двух квадратов единственным образом. Эйлер заметил, что этот признак удобен для проверки простоты больших чисел (перебор существенно сокращается, если использовать информацию о том, какие остатки могут давать квадраты при делении на небольшие числа\*).

Н. Васильев, Д. Фомин

**M1289.** Сумма целых чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$  (написанных по окружности) равна 1. Для каждого  $k$  от 1 до  $n$  через  $N_k$  обозначим количество положительных сумм (начинающихся с  $a_k$ ):

$$a_k, \quad a_k + a_{k+1}, \quad \dots, \quad a_k + a_{k+1} + \dots + a_n + a_1 + \dots + a_{k-1}.$$

Докажите, что все  $N_k$  различны.



Будем считать, что числа  $a_1, a_2, \dots, a_n$  написаны возле точек  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , расположенных по часовой стрелке на окружности. Условимся говорить, что точка  $A_k$  мажорирует точку  $A_j$ , и записывать это в виде  $A_k > A_j$ , если сумма всех чисел от  $a_k$  до  $a_{j-1}$  по часовой стрелке положительна. (Разумеется, под  $a_0$  понимается  $a_n$ .) Тогда из условия, что сумма всех чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$  равна 1, вытекают два следующих свойства:

1) Если  $A_k > A_j$  и  $A_j > A_p$ , то  $A_k > A_p$ . (Здесь нуждается в объяснении лишь случай, изображенный на рисунке, когда дуги  $A_k A_j$  и  $A_j A_p$  накладываются друг на друга. При этом сумма чисел на одной и другой дуге не меньше  $1 + 1 = 2$ , на всей окружности сумма равна  $-1$ , следовательно, сумма чисел на дуге  $A_k A_p$  не меньше 1.)

2) Для любых двух точек  $A_k$  и  $A_j$ , либо  $A_k > A_j$ , либо  $A_j > A_k$ .

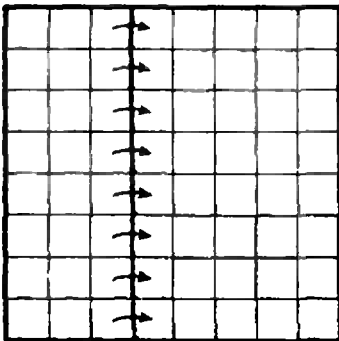
Остается заметить, что  $N_k$  — это число точек, которые мажорирует точка  $A_k$ . Отсюда следует, что все эти числа различны. В самом деле, если  $A_k > A_j$  и  $A_j$  мажорирует  $N_j$  некоторых точек, то  $A_k$  мажорирует согласно свойству 2) все эти точки и еще по крайней мере одну —  $A_p$ , поэтому  $N_k > N_j$ .

Д. Фомин

\* Подробнее об этом написано, например, в замечательной книге «Энциклопедия элементарной алгебры и анализа» Г. Вебера, изд-во Mathesis, Одесса, 1906.

# Задачник „Кванта“

**M1290.** Квадратный лист прозрачной бумаги размера  $8 \times 8$  разграфлен 14 прямыми на 64 клетки  $1 \times 1$  и произвольным образом сложен по этим линиям в книжечку размером  $1 \times 1$  (из 64 листов). Листы книжки нумеруются по порядку числами 1, 2, ..., 64, а затем она вновь разворачивается. Пусть  $p$  — наибольшая разность номеров соседних (граничащих по стороне) клеток. Каково наименьшее возможное значение  $p$  и при каком складывании оно достигается?



**Ф1298.** Тяжелый шарик подбросили вверх со скоростью  $v_0$ . Считая силу сопротивления пропорциональной скорости шарика, найдите отрезок времени, через который шарик упадет в точку, откуда он был брошен. При скорости  $v_0$  сила сопротивления  $F = \alpha v_0 \gg mg$  (здесь  $\alpha$  — коэффициент пропорциональности,  $m$  — масса шарика).

Ответ: наименьшее возможное значение  $p$  равно 15 и достигается при складывании гармошкой сначала в одном направлении, а потом — в другом.

Докажем, что при любом складывании найдутся две соседние по стороне клетки с разностью номеров не менее 15.

Каждый из 14 отрезков длины 8, которыми квадрат поделен на клетки, при складывании перешел в отрезок (той же или меньшей длины); некоторые отрезки могут целиком совпасть и в дальнейшем складываются вместе.

Рассмотрим некоторый отрезок длины 8, который при складывании перешел в отрезок длины 1, по которому проводится последнее складывание — когда книжечка  $2 \times 1$  складывается в одну клетку  $1 \times 1$ ; причем выберем этот «красный» отрезок так, чтобы по одну и другую его стороны на квадрате лежали точки, находящиеся перед последним складыванием в двух разных клетках книжечки  $2 \times 1$ . Рассмотрим 8 пар клеток квадрата, разделенных красным отрезком (на рисунке они соединены голубыми дужками). При последнем складывании какая-то из этих пар окажется наружной: между соответствующими страницами будет не менее 14 других, поэтому разность их номеров не менее 15.

Н. Васильев

Обозначим максимальную высоту подъема шарика через  $h$ . По условию задачи, вязкое трение велико, поэтому будем считать, что падение происходит с установившейся скоростью

$$v_{\text{уст}} = mg/\alpha$$

и время падения

$$\tau_{\text{пад}} = \frac{h}{v_{\text{уст}}} = \frac{h\alpha}{mg}$$

При движении вверх на шарик действует постоянная сила тяжести и изменяющаяся сила сопротивления. Поэтому ускорение шарика равно  $a = g + \alpha v/m$  и направлено вниз. Пусть в какой-то момент скорость шарика равна  $v_i$ . Тогда малые приращения скорости и перемещения будут равны соответственно

$$\Delta v_i = a_i \Delta t_i = g \Delta t_i + \frac{\alpha v_i}{m} \Delta t_i,$$

$$\Delta h_i = v_i \Delta t_i.$$



## Задачи „Кванта“

Суммируя каждое из соотношений, получаем

$$\sum \Delta v_i = v_0 = g \sum \Delta t_i + \frac{\alpha}{m} \sum v_i \Delta t_i,$$

$$\sum \Delta h_i = h = \sum v_i \Delta t_i,$$

или

$$v_0 = g \sum \Delta t_i + \frac{\alpha}{m} h,$$

откуда время подъема

$$\tau_{\text{под}} = \sum \Delta t_i = \frac{v_0}{g} - \frac{\alpha h}{mg}.$$

Тогда окончательно найдем

$$\tau_{\text{общ}} = \tau_{\text{под}} + \tau_{\text{пад}} = \frac{v_0}{g}.$$

Получился интересный ответ: если вязкость достаточно велика, то время подъема — падения уже не зависит от вязкости и составляет ровно половину времени подъема — падения в случае отсутствия сопротивления. На самом деле ничего удивительного здесь нет — при увеличении вязкости уменьшается высота подъема.

А. Андрианов

**Ф1299.** Черный шарик радиусом  $r=1$  м подвешен на тонкой длинной нити длиной  $l=1$  м. Вся система помещена в вакуумированную стеклянную трубку с аргоном при давлении  $p_0=0,1$  Па. Шарик освещают горизонтальным пучком света, плотность потока энергии в котором равна  $w_0=100$  Дж/(м<sup>2</sup>·с). Оцените величину отклонения шарика от положения равновесия под действием света. Теплопроводностью шарика пренебречь. Учтите, что абсолютно черное тело, нагретое до абсолютной температуры  $T$ , излучает с единицы поверхности за единицу времени энергию, равную  $\sigma T^4$ , где  $\sigma=5,67 \cdot 10^{-8}$  Вт/(м<sup>2</sup>·К<sup>4</sup>). Температура газа в трубке постоянна и равна  $T_0=293$  К. Молярная масса аргона  $M=0,04$  кг/моль, плотность шарика  $\rho=1$  г/см<sup>3</sup>.

Свет, падая на шарик с одной стороны, нагревает ее на некоторую величину  $\Delta T$  ( $\Delta T \ll T_0$ ). Шарик тепла не проводит, поэтому поступающая энергия идет, во-первых, на излучение, а во-вторых, на обмен теплом с окружающим газом.

Мощности, рассеиваемая при излучении с единицы поверхности, составляет

$$W_1 = \sigma(T_0 + \Delta T)^4 - \sigma T_0^4 \approx 4\sigma T_0^3 \Delta T.$$

Если с единицей поверхности шарика за одну секунду сталкивается  $N$  молекул газа и при каждом ударе отдается энергия  $\Delta W$ , то всего в окружающую среду отдается мощность

$$W_2 = N \Delta W.$$

Пусть к поверхности шарика движется  $1/6$  часть всех молекул, имеющих одинаковые скорости  $v = \sqrt{3RT_0/M}$ , а концентрация молекул в сосуде составляет  $n = p_0/(kT_0)$ . Тогда (сделаем верхнюю оценку)

$$\Delta W = \frac{3}{2} k(T_0 + \Delta T) - \frac{3}{2} kT_0 = \frac{3}{2} k \Delta T,$$

$$W_2 = \frac{1}{6} n v \Delta W = \frac{1}{4} \frac{p_0 v \Delta T}{T_0}$$

и

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{1/4 p_0 \Delta T \sqrt{3RT_0/M}/T_0}{4\sigma T_0^3 \Delta T} \approx 0,01.$$

## Задача „Кванта“

Таким образом, получаем, что можно пренебречь теплообменом с газом и считать, что вся поступающая энергия идет только на переизлучение. Поэтому

$$\Delta T = \frac{W_{\text{пост}}}{4\sigma T_0^3} = \frac{w_0 \pi r^2}{4\sigma T_0^3} = 17,5 \text{ К.}$$

Давление газа на освещенную часть шарика больше, чем на неосвещенную, так как атомы при столкновении приобретают в среднем большую скорость, а значит, и уносят больший импульс:

$$p = nkT_{\text{эфф}} = nk(T_0 + (T_0 + \Delta T))/2,$$

$$\Delta p = p - p_0 = nk \frac{\Delta T}{2} = \frac{p_0 \Delta T}{2T_0}.$$

Сила давления, действующая на шарик, равна

$$F = \Delta p \pi r^2,$$

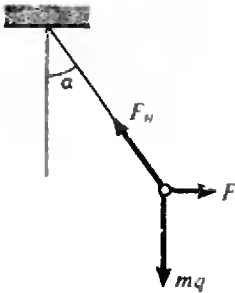
сила тяжести —

$$mg = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho,$$

отклонение шарика от положения равновесия —

$$x = l \frac{F}{\sqrt{m^2 g^2 + F^2}} \approx 0,2 \text{ мм.}$$

А. Семёнов



**Ф1300.** Известно, что при внесении незаряженной проводящей сферы в однородное электрическое поле напряженностью  $E_0$  напряженность поля вблизи точки  $A$  (рис. 1) оказывается равной  $3E_0$ , а вблизи точки  $B$  — нулю. Определите напряженность поля вблизи точки  $B$ . Найдите полный заряд, индуцированный на полусфере  $BAE$ . Радиус сферы  $R$ .

Есть несколько способов решения этой задачи. Мы разберем здесь один из них.

Сначала найдем распределение зарядов на сфере. Обозначим поверхностную плотность зарядов вблизи точки  $A$  через  $\sigma_0$  и будем искать угловую зависимость  $\sigma(\alpha)$  в виде  $\sigma(\alpha) = \sigma_0 f(\alpha)$  (рис. 2). В силу симметрии функция  $f(\alpha)$  четная, т. е.  $f(\alpha) = f(-\alpha)$ . Воспользуемся принципом суперпозиции — представим поле  $\vec{E}_0$  (рис. 3) в виде суммы двух однородных полей  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_2$  ( $E_1 = E_2$ ). Выразим плотность зарядов вблизи точки  $A$  через заряды, наведенные полями  $E_1$  и  $E_2$ :

$$\sigma_A = \sigma_0 = \sigma(\vec{E}_1) + \sigma(\vec{E}_2) = \sigma_0 \frac{E_1}{E_0} f(\alpha) + \sigma_0 \frac{E_2}{E_0} f(\alpha).$$

Здесь мы воспользовались тем обстоятельством, что константа  $\sigma_0$  в распределении  $\sigma(\alpha)$  пропорциональна внешнему полю:

$$\frac{\sigma_0(E_0)}{E_0} = \frac{\sigma_0(E_1)}{E_1} = \frac{\sigma_0(E_2)}{E_2}.$$

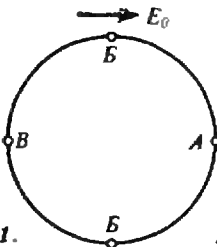


Рис. 1.

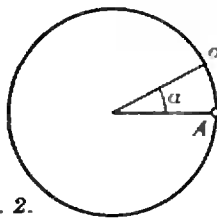


Рис. 2.

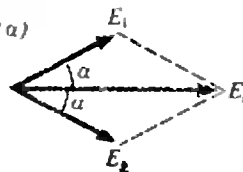


Рис. 3.

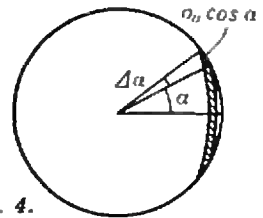


Рис. 4.

## Задачник „Квант“

Но  $E_1 = E_2 = E_0 / (2 \cos \alpha)$ , значит,

$$f(\alpha) = \cos \alpha.$$

Теперь найдем значение  $\sigma_0$ . Для этого рассмотрим небольшой заряженный участок на сфере, включающий точку  $A$ . Если подойти к нему совсем близко, то он превратится в знакомый объект — бесконечную заряженную плоскость, которая создает однородное поле напряженностью  $\sigma_0 / (2\epsilon_0)$ , направленное в обе стороны от плоскости. Внутри сферы поле равно нулю, снаружи в непосредственной близости от точки  $A$  оно равно  $3E_0$ . Переход через выделенный нами участок дает скачок поля  $3E_0$ , значит,

$$\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} - \left(-\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}\right) = 3E_0 \Rightarrow \sigma_0 = 3\epsilon_0 E_0.$$

Заметим, что плотность зарядов в точке  $B$  равна  $-\sigma_0$  (это видно из симметрии: впрочем, и из полученной нами формулы для функции  $f(\alpha)$  это тоже следует). Следовательно, поле около этой точки такое же, как и около точки  $A$ , только направлено оно не от сферы, а к ней. Итак, искомая напряженность поля

$$\vec{E}_B = \vec{E}_A = 3\vec{E}_0.$$

Осталось найти полный заряд полусферы  $BAE$ . Разобьем ее на тонкие кольца — одно из них выделено на рисунке 4. Заряд этого кольца равен

$$\Delta Q = \sigma_0 \cos \alpha \cdot \Delta S = \sigma_0 \cos \alpha \cdot 2\pi R \sin \alpha \cdot R \Delta \alpha.$$

Подставляя сюда значение  $\sigma_0$  и суммируя заряды (интеграл получается совсем простой, но, если вам не хочется его считать, попробуйте выразить площадь проекции этого кольца на плоскость, проходящую через центр сферы и перпендикулярную  $\vec{E}_0$ ), получаем

$$Q = 3\epsilon_0 R^2 E_0.$$

*В. Можеев*

**Ф1301.** На тороидальном сердечнике симметрично расположены три одинаковые обмотки, образующие трансформатор. Одну из обмоток подключили к источнику переменного напряжения, вторую оставили разомкнутой, а к третьей подключили вольтметр. Оказалось, что вольтметр в этом случае показывает половину напряжения источника. Что он покажет, если вторую обмотку замкнуть накороток? Считайте сопротивления обмоток пренебрежимо малыми, вольтметр и источ-

Из условия ясно, что в первом случае поле создается только катушкой, включенной в сеть. Магнитный поток в этой катушке равен

$$\Phi_1 = LI_1,$$

где  $L$  — индуктивность катушки,  $I_1$  — ток в ней. Очевидно, что поток в третьей катушке тоже пропорционален току  $I_1$ , т. е.

$$\Phi_3 \sim I_1, \text{ или } \Phi_3 = MI_1,$$

где  $M$  — коэффициент, который обычно называют взаимной индуктивностью катушек. Тогда для отношения напряжений на катушках получаем

$$\frac{U_3}{U_1} = \frac{\Phi_3}{\Phi_1} = \frac{\Phi_3}{\Phi_1} = \frac{M}{L} = \frac{1}{2}.$$

Во втором случае токи есть в двух катушках — включенной в сеть и замкнутой накороток. Поэтому

# Задача „Кванта“

ник — идеальными, магнитную проницаемость сердечника — не изменяющейся при различных значениях магнитной индукции.

запишем

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= LI_1 + MI_2, \\ \Phi_3 &= MI_1 + MI_2, \\ \Phi_2 &= MI_1 + LI_2 = 0\end{aligned}$$

(так как сопротивление цепи мало).  
Отсюда получаем

$$I_2 = -I_1 \frac{M}{L}$$

и

$$\begin{aligned}\frac{U_3}{U_1} &= \frac{\Phi_3}{\Phi_1} = \frac{MI_1 + MI_2}{LI_1 + MI_2} = \frac{M - M^2/L}{L - M^2/L} = \\ &= \frac{M}{L} \frac{1 - M/L}{1 - M^2/L^2} = \frac{M}{L} \frac{1}{1 + M/L} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Следовательно, вольтметр покажет теперь треть напряжения источника.

А. Андрианов

**Ф1302.** На прислоненное к стенке тело массой  $M$  перпендикулярно стенке действует сила, изменяющаяся по гармоническому закону  $F = F_0 \cos \omega t$ . Между телом и стенкой помещают невесомую пружину. Какой должна быть ее жесткость, чтобы амплитуда силы, действующей на стенку, отличалась от  $F_0$  в 3 раза?

Это — обычная задача на расчет вынужденных колебаний. Решение — уравнение колебаний груза с частотой вынуждающей силы (см. рисунок):

$$x = A \cos(\omega t + \varphi),$$

где  $A$  — амплитуда,  $\varphi$  — сдвиг фаз вынужденных колебаний.

Согласно второму закону Ньютона,

$$F_0 \cos \omega t - kx = Ma,$$

или

$$F_0 \cos \omega t - kA \cos(\omega t + \varphi) = -M\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi).$$

Видно, что сдвиг фаз  $\varphi$  равен либо 0, либо  $\pi$ . В обоих случаях амплитуду силы  $T = kx$  можно записать в виде

$$T_{\max} = kx_{\max} = \frac{F_0}{|1 - M\omega^2/k|}.$$

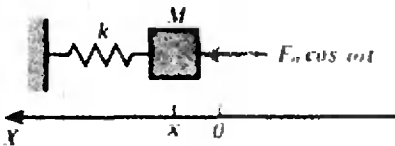
Нас интересуют значения  $k$ , для которых  $T_{\max} = 3F_0$  и  $T_{\max} = 1/3F_0$ , поэтому запишем

$$1 - \frac{M\omega^2}{k_1} = \frac{1}{3} \Rightarrow k_1 = 3/2 M\omega^2,$$

$$\frac{M\omega^2}{k_2} - 1 = \frac{1}{3} \Rightarrow k_2 = 3/4 M\omega^2,$$

$$\frac{M\omega^2}{k_3} - 1 = 3 \Rightarrow k_3 = 1/4 M\omega^2.$$

И. Воробьев



# „Квант” для младших школьников

## Задачи

1. Некоторое трехзначное число состоит из различных цифр, следующих в порядке возрастания, а в его названии все слова начинаются с одной и той же буквы. Другое трехзначное число, наоборот, состоит из одинаковых цифр, но в его названии все слова начинаются с различных букв. Найдите эти числа.

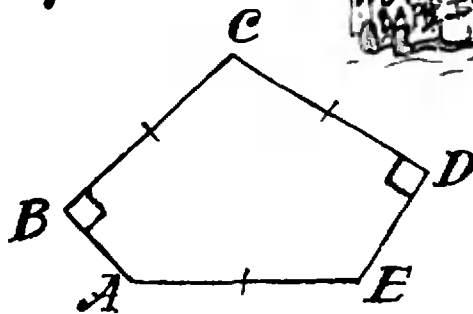
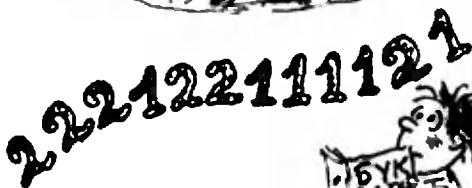
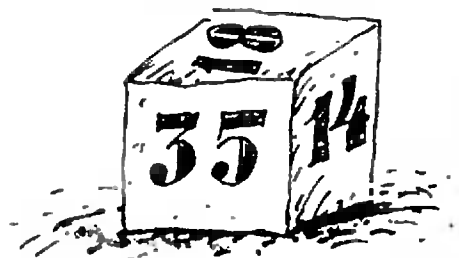
2. На гранях кубика написаны 6 чисел. Те числа, которые не видны на рисунке, — простые. Какие это числа, если известно, что суммы чисел на каждой паре противоположных граней равны?

3. Несколько шахматистов в парке целый день играли в шахматы. Поскольку у них был лишь один комплект шахмат, то они установили следующий порядок игры: выигравший очередную партию пропускает две следующие партии, а проигравший — четыре. Сколько было шахматистов, если удалось это правило соблюсти? (При ничьей проигравшим считался тот, кто играл белыми фигурами.)

4. Если в некотором слове заменить буквы на номера этих букв в алфавите, получится число 222122111121. Какое это слово?

5. В выпуклом пятиугольнике  $ABCDE$  углы  $ABC$  и  $CDE$  равны по  $90^\circ$ , стороны  $BC$ ,  $CD$  и  $AE$  равны по 1 и сумма сторон  $AB$  и  $DE$  равна 1. Докажите, что площадь пятиугольника равна 1.

Эти задачи нам предложили И. Акулич, Н. Антонович, С. Токарев, Х. Ахмедов и В. Произолов.



# ЗАГАДКА ЛЕЙДЕНСКОЙ БАНКИ

Л. КРЫЖАНОВСКИЙ

Английский химик, физик и историк науки Джозеф Пристли (1733—1804) назвал лейденский опыт самым замечательным открытием в области электричества. Этот опыт, которым увенчалось изобретение первого конденсатора, был научной сенсацией XVIII века: всех восхищала длинная голубоватая искра и изумляло «электрическое потрясение» при разряде лейденской банки через тело экспериментатора; знатоки ценили способность лейденской банки накапливать большой заряд и долго хранить его.

В музее-усадьбе «Архангельское» под Москвой есть картина художника Шарля-Амедея Ван Лоо (1719—1795) «Электрический опыт» (1777 г.), рисунок с которой вы видите здесь на соседней странице. В чем же, собственно, состоит опыт, столь достоверно изображенный художником?

До изобретения «вольтова столба» (1799 г.) лабораторными источниками электричества служили только машины, основанные на электризации трением. Такая машина и изображена на картине — стеклянный шар, который при вращении трется о подушечку и вырабатывает заряд (раньше шар терся просто о руки ассистента). Девушка, изображенная в центре картины, стоит на изолирующей подставке. Стержень, который девушка держит в левой руке, почти касается вращающегося шара. Видны искры между шаром и стержнем. Тело человека — в общем неплохой проводник, поэтому другой стержень, который девушка держит в правой руке, также оказывается заряженным.

Главный участник опыта — бедняга-негритенок. В правой руке он держит сосуд с водой, куда погружен только что упомянутый стержень. Сосуд — это и есть лейденская банка в ее первоначальном варианте (1745 г.). В лейденской банке, изображенной на картине, диэлектриком служит стекло, внутренним электродом — вода, а внешним — ладонь экспериментатора. На картине изображен момент зарядки конденсатора. Пройдет мгновение, негритенок приблизит свободную руку к стержню, между стержнем и рукой проскочит искра — и конденсатор разрядится через негритенка, который испытает электрический удар.

Одно из первых исследований лейденской банки провел американский ученый, просветитель и политик Бенджамин Франклин (1706—1790), который установил, в частности, что в лейденской банке одновременно накапливаются заряды, равные по величине и противоположные по знаку.

Франклин задался вопросом, где же, собственно, «сидят» заряды в лейденской банке. Для получения ответа на этот вопрос Франклин проделал такой опыт. Он зарядил лейденскую банку, а затем вынул из нее стержень и вылил «наэлектризованную» воду в другой сосуд. Лейденский опыт с этим сосудом не получился, зато, налив новой воды в первую лейденскую банку, Франклин разрядил ее через свое тело и испытал электрический удар практически такой же силы, как если бы он не выливал «наэлектризованную» воду. Франклин сделал вывод, что заряды

«сидят» в стекле, а не в воде, как он сперва предположил.

Этот опыт описывается многими историками науки, которые при этом явно или неявно подтверждают справедливость вывода Франклина. К сожалению, осталось почти незамеченным исследование Адденбрука (1922 г.), в котором показана ошибочность вывода Франклина.

Адденбрук сделал разборный конденсатор, состоящий из трех цилиндров: одного стеклянного и двух металлических, плотно прилегающих к стеклянному изнутри и снаружи соответственно. Исследователь зарядил такой конденсатор, затем аккуратно разобрал его и ввел в соприкосновение друг с другом металлические цилиндры. Если цилиндры были заряжены, то они, естественно, должны были при этом разрядиться. Адденбрук снова собрал конденсатор. Как и в опыте Франклина, конденсатор оказался заряженным практически так же, как первоначально. Но Адденбрук не спешил подтвердить вывод Франклина. Он проделал подобный опыт с парафиновым цилиндром вместо стеклянного, и в этом случае получился результат, противоположный франклиновскому: восстановленный конденсатор был незаряженным, а заряды, как оказалось, «сидели» на металлических цилиндрах-обкладках (разумеется, до их соприкосновения).

Адденбрук сделал вывод, что «эффект Франклина» обусловлен водяной пленкой, которой в обычных условиях всегда покрыто стекло. Дело в том, что заряды в состоянии равновесия располагаются на поверхности проводника, роль которой как раз исполняет пленка воды. При удалении проводника (сливании воды, например) почти все заряды проводника остаются на этой пленке. Если тщательно просушить стекло и провести опыт в сухой атмосфере, то «эффект Франклина» не наблюдается.

Конечно, в опыте Франклина всегда имеет место «перетекание» ионов на стекло, но этот эффект незначи-



лен. Несуществен в данном случае и электретный эффект\*).

Следует заметить, что водяная пленка на ободке лейденского сосуда не препятствует его зарядке из-за малой подвижности ионов (разрядка конденсатора по пленке происходит гораздо медленнее, чем его зарядка).

Есть много школьных задач по физике, в которых речь идет о мысленных экспериментах с удалением и заменой диэлектриков конденсатора. При этом молчаливо подразумевается, что «эффект Франклина» отсутствует, т. е. заряжены только обкладки конденсатора. Как видим, в действительности дело обстоит сложнее.

\* Об электретном эффекте можно прочитать в статье «Электреты — диэлектрические аналоги магнитов», опубликованной в № 6 и 7 нашего журнала за этот год. (Примеч. ред.)

# Конкурс «Математика 6—8»

Журнал «Квант» продолжает конкурс по решению математических задач для учащихся 6—8 классов. Конкурс состоит из 24 задач (по 3 в каждом номере) и закончится в апреле будущего года. Победители будут награждены призами журнала «Квант».

Решение задач из этого номера высылайте не позднее 1 февраля 1992 года по адресу: 103006, Москва К-8, ул. Горького, 32/1, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6—8»). Не забудьте указать фамилию, имя, школу и класс.



## ЗАДАЧИ

7. Число 1,5 интересно тем, что оно в 4 раза меньше суммы своих цифр. Найдите число, которое в 8 раз меньше суммы своих цифр.

*М. Варга*

8. На листе бумаги размером  $3 \times 4$  сделали надрезы так, что он при этом не распался, но им стало возможно оклеить кубик

$1 \times 1 \times 1$  в два слоя. Как это сделали?

*В. Произволов*

9. Три школьника, у каждого из которых было несколько бумажных рублей, подошли к киоску с мороженым. Петя, имевший меньше всех — всего 1 рубль — купил две порции и ушел. Остальные

двое решили купить как можно больше мороженого. Оказалось, что Коля смог бы купить 6 порций, а Вася — 11 порций. Если же они сложили бы свои капиталы, то на 18 порций им все равно не хватило бы. Сколько стоит порция мороженого в этом киоске?

*И. Анулич*

*Наше письмо*

С большим интересом я прочел статью «История одного неравенства» Л. Курляндчика и А. Файбусовича в журнале «Квант» № 4 за 1991 год. Я хочу рассказать о том, как с помощью элементарных вычислений можно доказать неравенство Шапиро для  $n=3, 4, 5$  и  $6$ .

В одном из недавних номеров журнала «Вюрцель» (ежемесячного математического журнала, рассчитанного на подготовленных школьников и старшекурсников) мы предложили неравенство Шапиро для  $n=4$  как «задачу на приз». Наш читатель Кристиан Вей из Нейштадта-

Доссе решил ее следующим образом. Рассмотрим

$$a_i = \sqrt{\frac{x_i}{x_{i+1} + x_{i+2}}} \quad \text{и} \quad b_i = \sqrt{x_i(x_{i+1} + x_{i+2})}.$$

Применив к ним неравенство Коши, получим

$$(\sum x_i)^2 \leq \left( \sum \frac{x_i}{x_{i+1} + x_{i+2}} \right) \times (\sum x_i(x_{i+1} + x_{i+2})). \quad (1)$$

Теперь достаточно показать, что

$$\frac{n}{2} \sum x_i(x_{i+1} + x_{i+2}) \leq (\sum x_i)^2. \quad (2)$$

Для  $n=4$  это есть просто переформулировка неравенства

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 \geq 0.$$

В дальнейшем я обнаружил, что этот метод работает также для  $n=3$  и  $n=5$  (при тривиальном изменении выкладок) и даже для  $n=6$ . В последнем случае я использовал неравенство

$$\sum (x_i - x_{i+1} + x_{i+3} - x_{i+4})^2 \geq 0, \quad (3)$$

из которого следует неравенство (2).

Я надеюсь, что это наблюдение вас заинтересует, так как я не нашел его в доступной мне литературе. Однако неравенства (1) и (2) не смогут оказаться полезными для  $n > 6$ , так как в этом случае неравенство (2), очевидно, не имеет места.

*Йоханнес Вальдман,  
член редколлегии журнала  
«Вюрцель»,  
Иена, Германия*





Школа "Кванте"

## Физика 9, 10, 11

Публикуемая ниже заметка «Пока вода испаряется...» предназначена десятиклассникам, заметка «Как излучать радиоволны?» — одиннадцатиклассникам.

Мы публикуем также «Избранные школьные задачи по физике».

### Пока вода испаряется...

Понаблюдаем за испарением воды в сосуде. Наполним водой небольшую кастрюльку или стакан и будем в течение дня следить за понижением ее уровня. Процесс этот достаточно медленный, и есть время поразмышлять и сделать некоторые оценки. В частности, попробуем оценить скорость испарения и сравним ее с нашими наблюдениями.

Каков же механизм процесса испарения? Вспомним, что для превращения некоторого количества воды в пар при неизменной температуре необходимо передать воде определенное количество теплоты — так называемую теплоту парообразования. Например,

при комнатной температуре ( $T = 290$  К) теплота парообразования составляет 2,46 кДж на каждый грамм испаренной воды. Так как в 1 г воды содержится  $1/18 N_A$  молекул, где  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$  моль<sup>-1</sup> — число Авогадро, то получаем, что для удаления из жидкости одной молекулы надо затратить энергию  $E_1 = 7,35 \times 10^{-20}$  Дж. В атомных расчетах принято выражать энергию в электронвольтах (эВ). Так как  $1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Дж, то  $E_1 = 0,46$  эВ.

На что же идет затраченная энергия? Ответ почти очевидный — на преодоление силы притяжения, которая действует со стороны жидкости на вылетающую молекулу. Каждая молекула взаимодействует с окружающими ее другими молекулами. Сила взаимодействия на малых расстояниях ( $r < r_0 \sim 10^{-8}$  см) имеет характер отталкивания, а на больших ( $r > r_0$ ) — притяжения. В толще жидкости каждая молекула окружена другими такими же молекулами со всех сторон, и средняя результирующая сила равна нулю. В другом положении оказывается молекула, которая пытается покинуть поверхность воды и улететь в свободное пространство. Она притягивается к молекулам, расположенным на поверхности, и эта сила ничем не скомпенсирована. Поэтому, чтобы преодолеть притяжение и окончательно покинуть поверхность воды, молекула должна обладать достаточно большой кинетической энергией. Сравните: средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул воды, равная  $(3/2) kT$ , где  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К — постоянная Больцмана, при  $T = 290$  К составляет 0,038 эВ, что на порядок меньше энергии  $E_1$ , которую необходимо сообщить молекуле для ее удаления из жидкости. Значит, покинуть поверхность могут лишь те немногочисленные молекулы, которые, находясь вблизи поверхности, в результате случайных столкновений приобрели энергию, на порядок большую среднего значения.

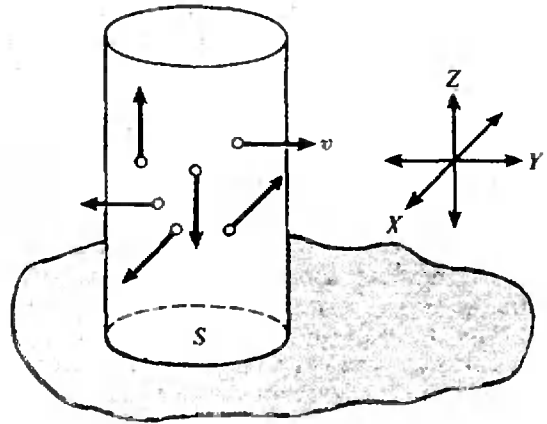
Мы теперь можем несколько иначе взглянуть на теплоту парообразова-

ния. Конечно, поглощаемое водой тепло не передается непосредственно тем молекулам, которые вылетают с поверхности. Эти молекулы получают избыточную энергию случайным образом от своего окружения. Однако в результате того, что жидкость покидают не любые, а только самые «энергичные» молекулы, на каждую оставшуюся молекулу приходится уже несколько меньшая энергетическая норма. Если жидкость не «компенсирует» эту потерю, поглотив из окружающей среды достаточное количество теплоты, то ее температура будет уменьшаться. Чтобы этого не произошло, к жидкости надо подвести количество теплоты, как раз равное ее теплоте парообразования.

Иногда у школьников возникает неправильное представление о том, что вылетевшие быстрые молекулы обладают аномально большой энергией и поэтому пар должен быть горячей жидкости. Это, конечно, не так. Только в начале своего «свободного» движения молекула обладает избыточной энергией. Преодолевая силу притяжения, она теряет часть своей избыточной энергии, и средняя энергия вылетевших молекул оказывается равной средней энергии пара той же температуры.

Все это хорошо, скажете вы, но мы пока ни на шаг не продвинулись в оценке того, как быстро должна испаряться вода. Более того, стало понятно, что для проведения сколь-нибудь разумных оценок необходимо иметь гораздо более ясное количественное представление об «устройстве» жидкости и характере движения ее молекул. Но все же нам удастся преодолеть необходимые расчеты. И вот каким образом.

Оказывается, достаточно... мысленно поместить наш стакан с водой в закрытую банку. Через некоторое время в этой банке образуется насыщенный водяной пар, и процесс испарения прекратится. Точнее (и в этом суть!), испарение будет происходить так же, как и раньше, но количество вылетающих из жидкости молекул будет равно количеству молекул, попадающих в жидкость из пара. В таком случае говорят, что между жидкостью и паром установилось динамическое равновесие. Появляется возможность оценить интенсивность испарения кос-



венным путем, рассматривая не саму жидкость, а ее насыщенный пар. Выигрыш же состоит в том, что жидкость — объект очень сложный, а пар — достаточно простой. Во всяком случае, при проведении оценок насыщенный пар можно с хорошей точностью считать идеальным газом.

Проведем оценку, сделав некоторые упрощающие предположения. Будем считать, в частности, что все молекулы имеют одинаковую скорость  $v$  и что они могут двигаться не в произвольном направлении, а только в одном из шести направлений, задаваемых координатными осями (одна из осей вертикальна). За одну секунду на участок поверхности жидкости площадью  $S$  попадет  $1/6$  часть молекул, находящихся в цилиндре высотой  $v$  (см. рисунок):

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{1}{6} n v S,$$

где  $n$  — концентрация молекул (более детальный расчет дает множитель  $1/4$  вместо  $1/6$ ). Для оценки скорости  $v$  используем известное выражение для средней квадратичной скорости  $v_{cp} = \sqrt{3kT/m}$  (здесь  $m$  — масса одной молекулы), концентрацию насыщенного пара  $n$  выразим через его давление  $p_n$  с помощью уравнения состояния идеального газа  $p_n = nkT$ . Тогда для массы воды, «выпадающей» из насыщенного пара на площадку  $S$  поверхности за 1 с, получаем

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{1}{6} m n v_{cp} S = \frac{1}{2} p_n S \left( \frac{M}{3RT} \right)^{1/2},$$

где  $M$  — молярная масса воды,  $R$  — универсальная газовая постоянная. Подставляя численные данные ( $p_*$  при  $17^\circ\text{C}$  составляет  $0,02 \cdot 10^5$  Па), получим, что за 1 с на  $1 \text{ см}^2$  поверхности из насыщенного пара поступает  $0,16$  г воды. Если предположить, что с такой же скоростью происходит испарение, то уровень воды в сосуде должен был бы опускаться на  $1 \text{ см}$  каждые  $6$  секунд!

Ясно, что это совсем не похоже на реальную картину. Мы потерпели очень поучительное поражение, и теперь необходимо разобраться в его причинах. Обсудим некоторые из них.

Первая причина кроется в самом эксперименте. Реальный процесс испарения существенно замедляется из-за того, что воздух в комнате не сухой, а влажный. Причем сама по себе влажность порядка  $60$ — $80$  % приводила бы к замедлению процесса испарения всего в  $3$ — $4$  раза. Но если не создавать потока воздуха возле поверхности воды (например, включив вентилятор), то влажность непосредственно возле поверхности оказывается достаточно близкой к  $100$  % и процесс испарения замедляется еще во много раз. Наша же оценка скорости испарения относится к идеальному случаю, когда обратное поступление молекул на поверхность полностью отсутствует.

Оказывается, однако, что и в этом идеальном случае мы ошибаемся примерно в  $30$  раз, но эта ошибка связана уже с самим расчетом. Дело в том, что только  $3$ — $4$  % молекул, подлетающих к поверхности, захватываются этой поверхностью («прилипают») и попадают внутрь жидкости. Остальные же молекулы отражаются обратно.

Подведем окончательный итог. Если бы абсолютно сухой поток воздуха подхватывал все вылетевшие молекулы, поверхность воды в сосуде опускалась бы на  $1 \text{ см}$  не за  $6$  секунд, а за  $3$  минуты. Но все равно куда быстрее, чем можно было ожидать. Не правда ли?

*М. Анфилов, А. Черноуцан*

## Как излучать радиоволны?

Прежде чем излучать радиоволны — электромагнитные колебания определенной частоты, нужно эти колебания получить. Это можно сделать при помощи генератора незатухающих колебаний. А вот как добиться того, чтобы о наличии колебаний можно было узнать вдали от генератора, — это и есть тема заметки.

Сформулируем задачу конкретнее: что нужно подключить к выходу генератора незатухающих колебаний, чтобы от него побежала электромагнитная волна? Вопрос этот не простой, зато можно легко догадаться, какие элементы на роль излучающей антенны явно не подходят. Вот, например, резистор. Если мы подключим его к выходу генератора, то вся энергия, которую он от генератора получит, полностью перейдет в тепло. Не подходит на роль антенны и конденсатор — средняя мощность, которую он получает от генератора, в точности равна нулю (сдвиг фаз между напряжением и током равен четверти периода). Значит, ему просто нечего излучать — ведь при излучении электромагнитных волн энергия должна передаваться от источника по всем направлениям. То же самое справедливо и для катушки индуктивности.

Таким образом, для того чтобы мощность отнималась от генератора, нужно изменить сдвиг фаз между током и напряжением — он не должен составлять четверть периода. Этого можно добиться, например, соединив последовательно конденсатор и резистор. Однако ничего полезного для нас при этом не произойдет: теперь цепь нагрузки (конденсатор и резистор) отнимает от генератора энергию, но вся эта энергия полностью переходит в тепло. Попробуйте в этом убедиться самостоятельно — для такой простой цепи это не вызовет трудностей. Оказывается, и для произвольных  $LCR$ -цепей (например, как на рисунке 1) выполняется это правило: вся мощность, которую цепь получает от источника, переходит в

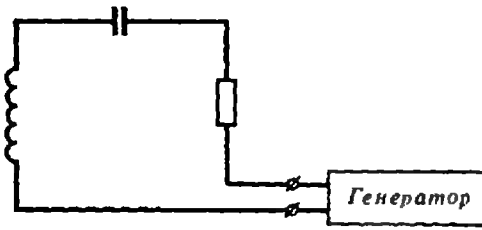


Рис. 1.

тепло. При этом зависимость мгновенной мощности от времени имеет вид  $p = u(t) i(t) = U_0 \cos \omega t \cdot I_0 \cos(\omega t + \varphi)$ , где  $\varphi$  — сдвиг фаз между током и напряжением. После простых тригонометрических преобразований легко найти среднюю мощность, потребляемую от источника за период (а значит, и за большой промежуток времени):

$$P_{\text{ср}} = \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos \varphi = UI \cos \varphi.$$

Это и есть в точности мощность, переходящая в тепло.

Заметим, кстати, что максимальное значение мгновенной мощности больше значения  $P_{\text{ср}}$ , причем при сдвигах фаз, близких к  $90^\circ$ , — во много раз. Это означает, что источник должен быть в состоянии развивать мгновенную мощность существенно более высокую, чем та, которую в среднем от него отнимают. Такое положение возникает часто в практической электротехнике — при подключении ламп дневного света, электродвигателей и т. п. С лампами дневного света это происходит потому, что ток через лампу задается последовательным подключением катушки индуктивности и сдвиг фаз получается близким к  $90^\circ$  (рис. 2). Излишняя нагрузка для электросети крайне нежелательна, так как приводит к дополнительным потерям в виде тепла и вынуждает применять провода с большим сечением. Положение можно поправить, подключив параллельно конденсатор подходящей емкости (тут нужна настройка в резонанс!). При

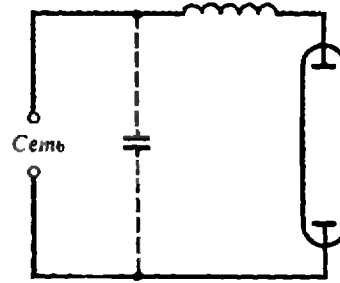


Рис. 2.

этом катушка и конденсатор обмениваются между собой энергией во время всего периода — «лишняя» энергия перекачивается между ними, а сеть — источник поступающей в нагрузку энергии — отдает только то количество энергии, которое переходит в тепло.

Итак, цепи такого рода ( $LCR$ -цепи) не годятся на роль антенны. Проблема состоит в том, чтобы сделать сдвиг фаз между током и напряжением в цепи отличным от  $90^\circ$ , но не за счет выделения тепла, т. е. без резисторов. Оказывается, если размеры компонентов цепи нагрузки малы по сравнению с длиной волны, ничего нельзя сделать. А вот при больших размерах элементов нагрузки дополнительный сдвиг фаз можно получить за счет запаздывания распространения волны.

Пусть в качестве нагрузки использован конденсатор, сопротивление которого (для переменного тока заданной частоты) оптимально для данного генератора. Теперь начнем увеличивать запаздывание, изменяя габариты конденсатора. Но нельзя просто увеличить размеры пластин конденсатора — его емкость станет больше. Для сохранения емкости придется увеличить и расстояние между пластинами. Строго говоря, конденсатор больших размеров — это уже не конденсатор. Сдвиг фаз теперь соответствует другой цепи, и от генератора потребуются мощность, хотя резисторов тут нет и тепло не выделяется. Следовательно, энергия от генератора должна куда-то уходить, а именно — излучаться в пространство.

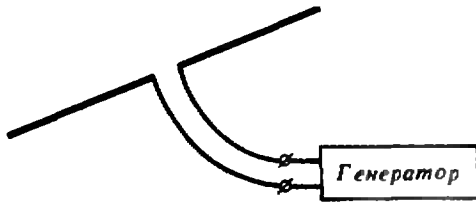


Рис. 3.

Для получения наибольшей излучаемой мощности нужно довести размеры и конфигурацию антенны до оптимума. Если такая антенна состоит, например, из двух стержней — длинных и тонких, то оптимальная длина каждого из них должна быть равна четверти длины волны, стержни нужно направить вдоль одной прямой, а выводы генератора незатухающих колебаний подключить так, как показано на рисунке 3. Такие антенны часто применяют в качестве приемных для телевизоров. В сущности приемные и передающие антенны не отличаются друг от друга (только для очень мощных передатчиков нужно делать специальные передающие антенны, с учетом высоких напряжений и больших токов, подаваемых на антенну для передачи).

Если размеры антенны выбраны правильно, то не создается «лишней» нагрузки для генератора радиопередатчика и отнимаемая от него энергия излучается в пространство. Однако эти пожелания легко удовлетворить только для стационарных радиопередатчиков и не очень низких частот передачи (для которых не слишком велика длина волны). Для переносных радиостанций это не всегда возможно — антенна получается намного короче, чем нужно для оптимального согласования с генератором.

В таком случае можно «облегчить участь» генератора, подключив последовательно с антенной катушку индуктивности (ее так и называют — удлинительной) — емкостное сопро-

тивление короткого антенного провода будет скомпенсировано индуктивным сопротивлением катушки.

Антенна может состоять и из нескольких проводников — выбирая длину и положение этих проводников и подавая в них токи от генератора в нужных фазах, можно добиться того, чтобы излучение происходило преимущественно в заданном направлении («направленная» антенна). Это — пример использования интерференции в технических целях. Кстати, вовсе не обязательно подключать все проводники к генератору — вполне достаточным для наших целей может оказаться тот ток, который возникает в проводнике из-за того, что он находится в электромагнитном поле основной антенны. Все это относится и к приемной антенне, которая чаще всего включает основной проводник — «вибратор» (происхождение этого термина должно быть ясным) и несколько дополнительных, ни к чему не подключенных проводников строго определенных размеров и местоположения (их называют «директор» и «рефлектор», от их числа и точности подбора зависит направленность антенны).

Оказывается, можно подобрать конфигурацию сложной антенны так, чтобы она работала удовлетворительно не только на строго определенной частоте, но и в целом диапазоне частот. Это совершенно необходимо, например, для приема телевидения — ведь не очень удобно иметь для каждого канала свою антенну. Однако, если частоты каналов сильно разнесены или антенна находится очень далеко от телецентра, приходится использовать несколько отдельных, хорошо настроенных антенн.

А. Рафаилов

# Избранные школьные задачи по физике

## 9 класс

1. Три груза массой  $m$  каждый соединены невесомыми пружинками и подвешены на нити (рис. 1). Найдите ускорение каждого груза сразу же после пережигания нити.

2. Через невесомый блок, который может вращаться без трения вокруг неподвижной горизонтальной оси, перекинули идеальную нить, к концам которой подвесили два груза (рис. 2). При каком отношении масс этих грузов сила, действующая на ось блока, будет равна силе тяжести, действующей на груз большей массы?

3. К тяжелой веревке длиной  $l$ , лежащей на гладком горизонтальном столе, приложили силу  $F$ , направленную вдоль веревки (рис. 3). Найдите натяжение веревки на расстоянии  $x$  от того конца, к которому приложена сила.

4. Коэффициент трения между бруском и наклонной доской (рис. 4) равен  $\mu$ . Постройте график зависимости силы трения между бруском и доской от угла  $\alpha$  наклона доски к горизонту. Масса бруска  $m$ .

5. В цирковом аттракционе мотоциклист едет по внутренней поверхности вертикального цилиндра радиусом  $R=10$  м. При какой скорости велосипедиста это возможно, если коэффициент трения между колесами мотоцикла и поверхностью цилиндра  $\mu=0,5$ ? Размерами мотоциклиста можно пренебречь.

## 10 класс

6. На какую высоту можно было бы поднять балку массой  $M=1$  т, если бы удалось полностью использовать всю энергию, выделяющуюся при остывании стакана чая от  $t_1=-100^\circ\text{C}$  до  $t_2=20^\circ\text{C}$ ? На какую высоту можно поднять эту же балку с помощью энергии, которую необходимо затратить для испарения воды, находящейся в стакане? Масса воды в стакане  $m=250$  г.

7. На сколько изменится температура каж-

дого из двух одинаковых шаров в результате лобового удара, если скорость налетающего шара уменьшилась с  $v_1=10$  м/с до  $u_1=4$  м/с? Второй шар до удара покоился. Удельная теплоемкость материала шаров  $c=300$  Дж/(кг · К).

8. На рисунке 5 изображены три процесса, в каждом из которых температура идеального газа изменяется на одну и ту же величину. В каком из этих процессов газ получает наибольшее количество теплоты?

9. Теплоизолированный от внешнего мира цилиндрический сосуд содержит подвижную перегородку, которая может перемещаться без трения. В начальный момент перегородка закреплена посередине сосуда, причем по одну ее сторону находится 1 моль некоторого идеального газа, а по другую сторону — 2 моля того же газа. Перегородка проводит тепло, поэтому оба газа имеют одинаковую температуру. Как изменится эта температура, если освободить перегородку?

10. В каком случае произойдет большее увеличение КПД идеальной тепловой машины, работающей по циклу Карно, — при увеличении температуры нагревателя на 1К или при уменьшении на такую же величину температуры холодильника?

## 11 класс

11. Луч карманного фонарика отражается в зеркальной дверце шкафа. На какой угол повернется отраженный луч, если дверцу приоткрыть на угол  $\alpha$ ?

12. Какова кажущаяся глубина реки, если ее истинная глубина  $h=1$  м? Дно рассматривают с мостика, глядя при этом вертикально вниз. Показатель преломления воды  $n=4/3$ .

13. Кубик из стекла с показателем преломления  $n$  ставят сверху на лист бумаги с текстом. При каком  $n$  текст нельзя будет увидеть через боковую грань кубика?

14. Параллельный пучок лучей падает на собирающую линзу с фокусным расстоянием  $F_1=15$  см. На каком расстоянии от собирающей надо поставить рассеивающую линзу с фокусным расстоянием  $F_2=-9$  см, чтобы после прохождения двух линз лучи снова шли параллельным пучком?

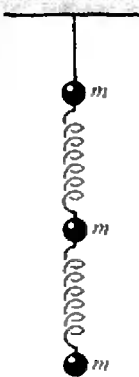


Рис. 1.

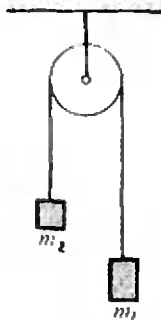


Рис. 2.

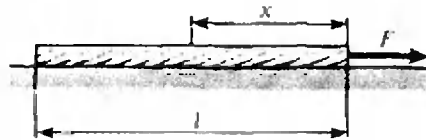


Рис. 3.

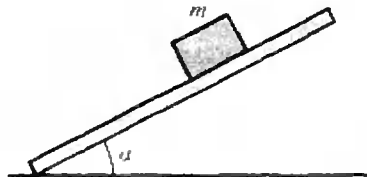


Рис. 4.

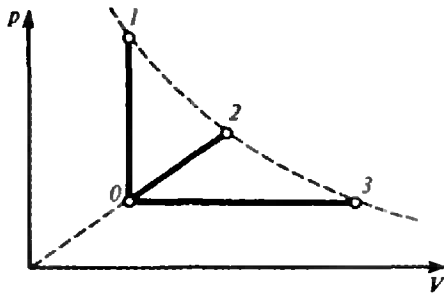


Рис. 5.

15. Сходящийся пучок лучей падает на рассеивающую линзу (рис. 6). В отсутствие линзы лучи сходились бы в точке А, расположенной на расстоянии  $d=10$  см от линзы.

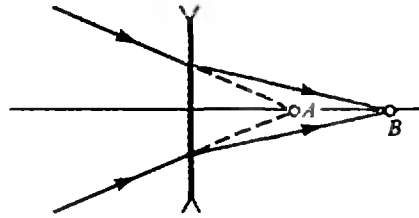


Рис. 6.

После преломления в линзе лучи сходятся в точке В, удаленной от линзы на расстояние  $f=15$  см. Найдите фокусное расстояние линзы.  
 Публикацию подготовил А. Черноуцан

(Начало см. на с. 17)

и оформить в отдельной школьной тетради — по одной задаче на листе, с сохранением порядка задач в задании.

На обложку тетради наклейте белый лист, оформленный следующим образом:

1. Фамилия, имя, отчество.
2. Подробный домашний адрес (с индексом).
3. Номер школы и класс, в котором вы учитесь.
4. Любые дополнительные сведения о себе (участие в олимпиадах, обучение в других заочных школах, членство в ВАКО «Союз», сведения о родителях).

Для получения решения приемной комиссии вложите в тетрадь конверт с вашим домашним адресом. Тетрадь с выполненным заданием вышлите не позднее 1 февраля 1992 года простой бандеролью по адресу:

141700, г. Долгопрудный, МФТИ, факультет аэрофизики и космических исследований, «Школа».

Вступительное задание обратно не высылается. Решение приемной комиссии будет сообщено в мае 1992 года.

Ниже приводятся условия задач вступительного задания в ЗАКШ. Задачи 1—6 предназначены поступающим в 10 класс, задачи 3—8 — в 11 класс. Для участия в конкурсе не обязательно решать все предлагаемые задачи.

### Вступительное задание

1. Шар массой  $M$  плавает на поверхности жидкости, погрузившись в нее наполовину. Внутри шара имеется полость. Определите массу песка, которую необходимо засыпать в полость, чтобы шар плавал внутри жидкости.

2. Мяч брошен вертикально вверх с начальной скоростью  $v_1=25$  м/с. Через  $t_1=1$  с брошен второй мяч так, что оба мяча достигают земли одновременно. Считая, что движение происходит вдоль одной прямой, найдите относительную скорость мячей за  $t_2=1$  с до падения.

3. На участке цепи, состоящем из двух последовательно соединенных резисторов, сопротивления которых отличаются в 2 раза, выделяется мощность  $P$ . Определите, как следует изменить силу тока на участке цепи, чтобы при параллельном соединении этих резисторов выделяемая мощность увеличилась в 2 раза.

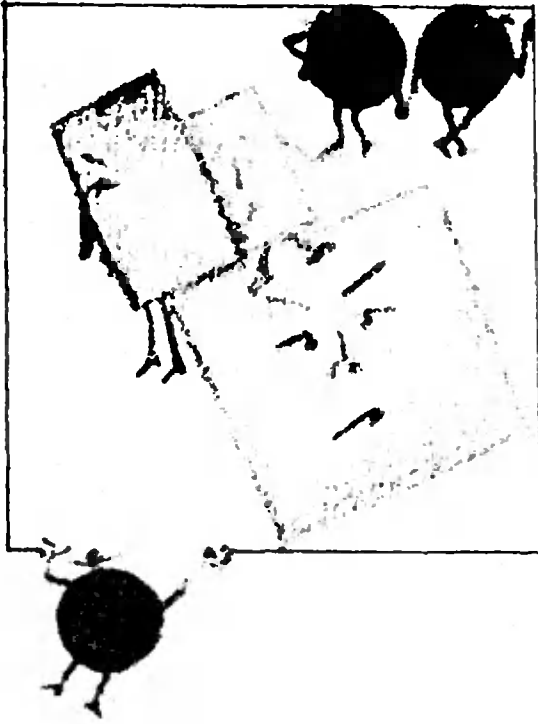
4. В сосуд с водой при  $t=25$  °С опустили медный шарик массой  $m=200$  г при температуре  $t_0=300$  °С. В момент, когда температуры воды и шарика сравнялись, в сосуд опустили еще один такой же шарик. До какой температуры нагреется вода? Удельная теплоемкость меди  $c_x=380$  Дж/(кг·К), воды  $c_w=4200$  Дж/(кг·К). Масса воды  $M=1$  кг.

5. Пушка установлена на платформе, движущейся с постоянной скоростью  $v$ . Скорость вылета снаряда относительно пушки  $v_0=5v$ . Определите угол, под которым необходимо выстрелить в направлении движения платформы, чтобы снаряд улетел на максимальное расстояние. Масса снаряда значительно меньше массы платформы.

6. На покоящийся шар налетает шар вдвое большей массы. В результате центрального неупругого столкновения шары разлетаются в противоположные стороны, причем скорость налетевшего шара оказывается в 3 раза меньше первоначальной. Определите, какая доля кинетической энергии перешла в тепло.

7. Пар совершает работу  $A=15$  кДж по перемещению поршня площадью  $S=200$  см<sup>2</sup>. При этом давление пара убывает от  $p_1=2$  МПа до  $p_2=0,1$  МПа. Считая зависимость давления от объема линейной, определите расстояние, на которое переместится поршень.

8. Определите, как изменится заряд заземленного металлического шара радиусом  $R$  при перемещении точечного заряда  $q$  между точками, расположенными на расстояниях  $2R$  и  $4R$  от центра шара.



*Математический  
Кружок*

# Индикатриса ширин и ее применение

Доктор физико-математических наук  
В. ЗАЛГАЛЕР

## Начнем с задачи

**Задача.** В квадрате  $70 \times 70$  размещены без налеганий пять фигур: квадрат  $30 \times 30$ , прямоугольники  $25 \times 15$  и  $20 \times 10$  и два круга радиусами 5. Докажите, что найдется место, чтобы, не сдвигая имеющиеся фигуры, разместить еще один круг радиусом 5.

**Решение.** Центр нового круга предстоит искать в квадрате  $Q$  размером  $60 \times 60$ , получающемся из квадрата  $70 \times 70$  после исключения краевой каймы шириной 5 (рис. 1). При этом искомый центр должен быть уда-

лен не менее чем на 5 от уже размещенных фигур. Окружим каждую из пяти фигур каймой шириной 5 (рис. 2). Общая площадь этих «расширенных» фигур  $2775 + 275 \pi < 3642$ . Казалось бы, они могут исчерпать площадь  $Q$ . Но если места для искомого центра нет, то, в частности, таким местом не является ни одна из вершин  $Q$ , т. е. каждая из них покрыта одной из «расширенных» фигур. Тогда хоть одна из вершин  $Q$  покрыта именно кругом радиусом 10 (см. рис. 1).

**Упражнение 1.** Докажите, что площадь части круга, находящейся вне  $Q$ , не меньше площади двух 90-градусных сегментов этого круга, т. е. не меньше, чем

$$(\pi - 2) \frac{10^2}{2} > 57.$$

Остается заметить, что площадь покрытой нашими фигурами части  $Q$  не больше чем  $3642 - 57 < 3600$ . Итак, «расширенные» фигуры не могут исчерпать площадь  $Q$ .

## Обобщение задачи

Теперь главное. Как вы подойдете к той же задаче, если вам предложат доказать, что найдется место не только для одного, но и для двух кругов радиусами 5?

Предложим план решения. В квадрате  $70 \times 70$  разместим 16 центров возможных кругов, как указано на рисунке 3. (Эти центры служат узлами квадратной решетки с шагом 20.) Несложный физический эксперимент с бумажными шаблонами «расширенных» фигур подсказывает нам,

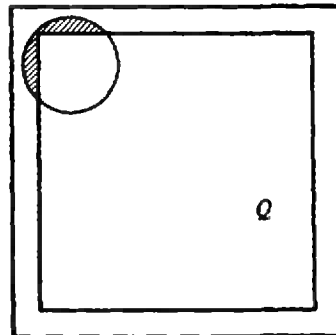


Рис. 1.



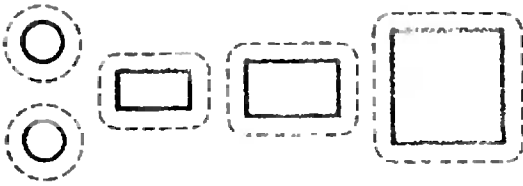


Рис. 2.

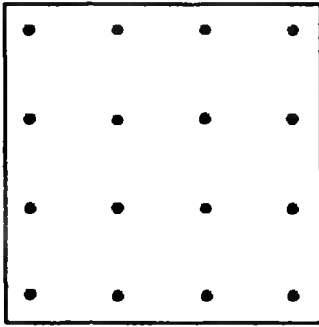


Рис. 3.

что квадрат  $40 \times 40$  (открытый, т. е. без включения в него границы) не может покрыть одновременно более 5 узлов, открытые многоугольники  $35 \times 25$  и  $30 \times 20$  — соответственно не более 4 и 3, и открытые круги радиусами 10 — не более чем по одному. Итого, при любом размещении наших расширенных фигур, из 16 отмеченных центров удастся покрыть не более 14. Так что два заведомо останутся непокрытыми. Поэтому к размещенным фигурам можно будет добавить два круга, притом именно из числа указанных заранее 16 кругов.

Упражнение 2. Прodelайте описанные выше эксперименты с шаблонами, вырезав их из бумаги.

Чтобы превратить эти «экспериментальные» соображения в строгое доказательство, обратимся к новым понятиям.

### Ширина фигуры

Будем рассматривать только замкнутые (содержащие свои граничные точки) ограниченные фигуры  $\Phi$ . Например, отрезки, треугольники, прямоугольники. Дадим три определения.

1. *Шириной* фигуры  $\Phi$  в направлении  $\vec{u}$  называют минимальную ширину замкнутой (т. е. включающей свои края) полосы, направленной пер-

пендикулярно  $\vec{u}$  и содержащей фигуру  $\Phi$ .

2. Просто *шириной* фигуры  $\Phi$  называют наименьшую из ширин  $\Phi$  в разных направлениях.

3. Если от произвольно фиксированной точки  $Q$  в каждом направлении  $\vec{u}$  отложить отрезок, длина которого равна ширине фигуры  $\Phi$  в направлении  $\vec{u}$ , то эти отрезки (мы называем их «радиусами» индикатрисы) заполнят фигуру, которую будем называть *индикатрисой* ширин фигуры  $\Phi$ .

#### Упражнения

3. Найдите ширину квадрата радиусом 1.

4. Докажите, что ширина треугольника равна наименьшей из его высот.

5. Убедитесь, что для отрезка длины  $d$  индикатриса ширины имеет вид двух касающихся в точке  $O$  кругов, каждый диаметром  $d$  (рис. 4).

6. Докажите, что индикатриса ширины прямоугольника совпадает с объединением индикатрис двух его диагоналей. (На рисунке 5 изображена индикатриса ширины прямоугольника  $40 \times 20$ . Пунктиром указан круг радиусом 40 и выделен угол, в пределах которого «радиусы» индикатрисы короче 40.)

7. Докажите, что индикатриса ширины треугольника совпадает с объединением индикатрис трех его сторон. (На рисунке 6 изображена индикатриса ширины равнобедренного треугольника  $T_1$  с основанием 40 и высотой 40, а на рисунке 7 — равнобедренного треугольника  $T_2$  с основанием  $20\sqrt{2}$  и боковыми сторонами  $20\sqrt{5}$ . Как и на рисунке 5 указан пунктиром круг радиуса 40 и выделен угол, в пределах которого «радиусы» индикатрисы короче 40.)

При данных выше определениях очевидна справедливость следующих утверждений.

Чтобы замкнутую ограниченную фигуру  $\Phi$  можно было покрыть открытой (не содержащей своих краев) полосой ширины  $h$ , необходимо и достаточно, чтобы ширина  $\Phi$  была меньше  $h$ .

Чтобы замкнутую ограниченную фигуру  $\Phi$  можно было покрыть открытым (не содержащим своего контура) квадратом со стороной  $a$ , не-

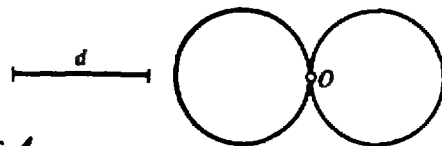


Рис. 4.

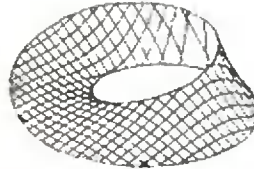
(Окончание см. на с. 42)

## Лист Мёбиуса

Лист Мёбиуса относится к числу «математических неожиданностей». Получить его очень просто:

склейте из бумажной полоски кольцо, только перед склеиванием поверните один конец на  $180^\circ$ . Если полоска

бумаги была длинной, то такой поворот мог произойти и случайно. Рассказывают, что открыть свой «лист» Мёбиусу помогла служанка, сшившая однажды неправильно концы ленты.



Как бы то ни было, но в 1858 году лейпцигский профессор Август Фердинанд Мёбиус (1790—1868), ученик К. Ф. Гаусса, астроном и геометр, послал в Парижскую академию наук работу, включившую сведения об этом листе. Семь лет он дождался рассмотрения своей работы и, не дождавшись, опубликовал ее результаты. Одновременно с Мёбиусом изобрел этот лист и другой ученик К. Ф. Гаусса — Иоганн Бенедикт Листинг (1808—1882), профессор Геттингенского университета. Свою работу он опубликовал на три года раньше, чем Мёбиус, — в 1862 году. Что же поразило этих двух немецких профессоров? А то, что у листа Мёбиуса — всего одна сторона. Мы же привыкли к тому, что у всякой поверхности, с которой мы имеем дело (лист бумаги, велосипедная или волейбольная камера), — две стороны. Убедиться в односторонности листа Мёбиуса несложно: начинайте постепенно окраши-

вать его в какой-нибудь цвет, начиная с любого места, и по завершении работы вы обнаружите, что весь он полностью окрашен.

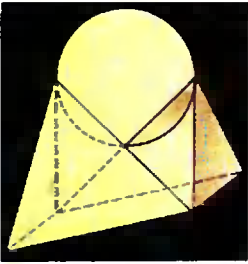
Вторая неожиданность поджидает нас в тот момент, когда мы попробуем разрезать лист Мёбиуса по его средней линии. «Нормальное» кольцо при этом распалось бы на два куска, а лист Мёбиуса превратится в одно перекрученное кольцо. Чтобы можно было продемонстрировать это свойство многократно, удобно соорудить лист Мёбиуса из застёжки «молния». Еще удивительнее то, что полученное кольцо уже двустороннее.



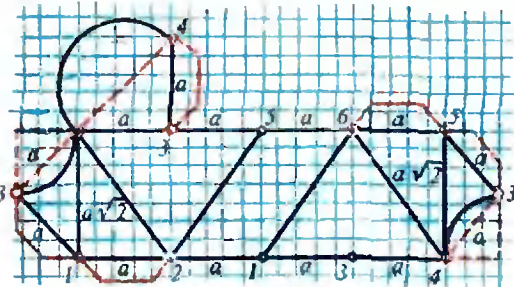
Неожиданность помер три: граница у листа Мёбиуса одна, а не распадается на две части, как у обычного кольца. Заметим, что свойство односторонности не исчезает у поверхности, если ее гнуть, растягивать, сжимать, но не склеивать и не рвать. Свойства геометрических объектов, которые не меняются при таких преобразованиях, изучает математическая наука — топология. (Любопытно, что это название ей дал Иоганн Листинг.)



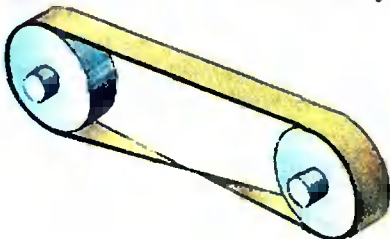
Лист Мёбиуса был одним из основных геометрических объектов, натолкнувших математиков на изучение, как теперь принято говорить, топологических свойств фигур. Московский математик К. Ливанов попробовал продеформировать таким образом лист Мёбиуса, чтобы его граница превратилась в окружность. И вот что у него получилось.



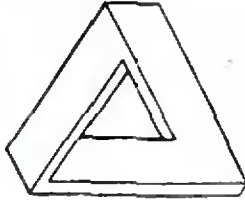
Для желающих склеить эту фигуру приводим ее развертку.



Свойство односторонности листа Мёбиуса было использовано в технике: если у ременной передачи ремень сделать в виде ленты Мёбиуса, то его поверхность будет изнашиваться вдвое



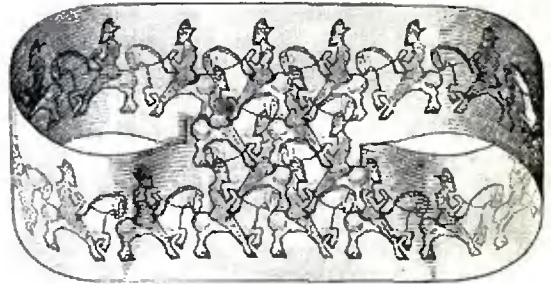
медленнее, чем у обычного кольца. Это дает ощутимую экономию. Возникшая недавно мода на рисунки «невозможных объектов» не обошла и лист Мёбиуса. Вот как его изобразил шведский художник О. Рутерсвард.



Лист Мёбиуса часто использовал в своих рисунках нидерландский художник М. Эшер. На предыдущей странице помещена его картина на эту тему, а вот еще один его рисунок. А что получится, если

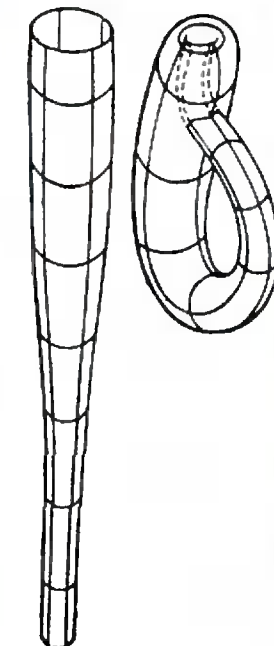
склеить границами два листа Мёбиуса? Представить себе это очень трудно, притом невозможно совершить такую операцию, если не разрывать поверхности пересекать саму себя.

Если же разрешить это делать, то получим любопытную поверхность без границы (как, например, у сферы), которая называется «бутылкой Клейна» — в честь еще одного выдающегося немецкого математика Феликса Клейна (1849—1925). Она изображена на рисунке внизу колонки. В заключение стоит упомянуть о «двойном



листе Мёбиуса». Получается он так: сначала склейте из бумажной полоски обычный лист Мёбиуса, затем возьмите по-

лоску вдвое более длинную и оберните ею лист Мёбиуса. В результате концы этой полоски сойдутся, и их нужно будет склеить между собой. Эта лента двусторонняя — одна ее сторона обращена к листу Мёбиуса, а другая — наружу. Если эти ленты разнять, то они оказываются сцепленными, а сам двойной лист Мёбиуса оказывается



сильно закрученным, он соответствует обычной склейке ленты, но с поворотом одного из ее концов на  $720^\circ$ . Конечно же, главная ценность листа Мёбиуса состоит в том, что он дал толчок новым обширным математическим исследованиям. Именно поэтому его часто считают символом современной математики и изображают на различных эмблемах и



значках, как, например, на значке механико-математического факультета Московского университета.

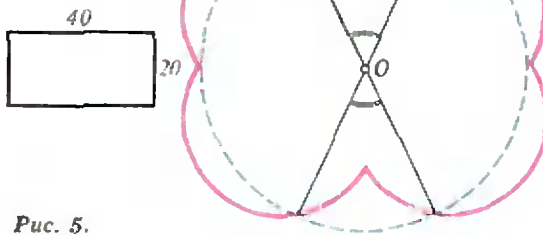


Рис. 5.

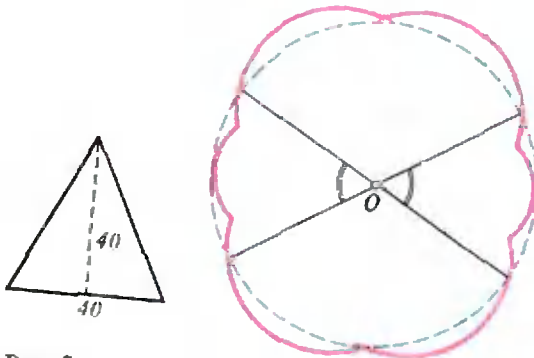


Рис. 6.

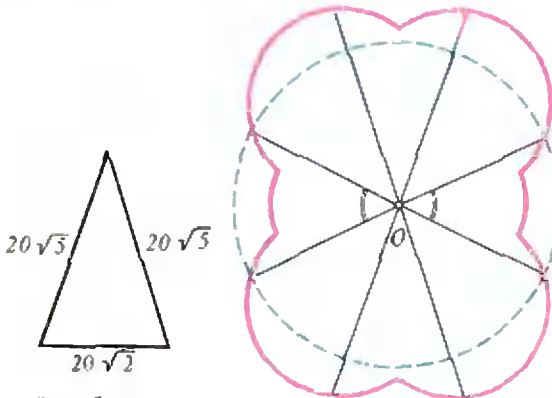


Рис. 7.

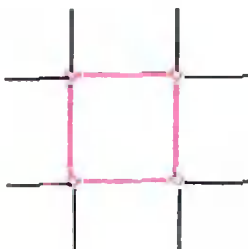


Рис. 8.

обходимо и достаточно, чтобы у индикатрисы ширины фигуры  $\Phi$  существовали два перпендикулярных «радиуса», каждый из которых был бы короче  $a$ .

Упражнение 8. Внимательно изучив рисунки 5, 6, 7, вычислите углы сектора, в пределах которого «радиусы» индикатрис короче 40, и на этом основании докажите, что открытым квадратом  $40 \times 40$  нельзя покрыть замкнутый прямоугольник  $40 \times 20$ , а также нельзя покрыть равнобедренные треугольники  $T_1, T_2$ .

### Решение задачи о двух кругах

Теперь мы готовы доказать экспериментально обнаруженные утверждения, высказанные ранее.

Прежде всего открытый круг радиуса 10 не может покрыть более одного узла решетки с шагом 20, поскольку расстояния между узлами не меньше 20-ти. Далее, у открытого прямоугольника  $30 \times 20$  диагональ короче 40, поэтому он может накрывать узлы только из двух строк и из двух столбцов решетки. Таких узлов четыре (рис. 8). Если бы наш прямоугольник накрыл все эти четыре точки, то продолжающая его открытая полоса ширины 20 накрыла бы замкнутый квадрат со стороной 20, что невозможно. Значит, открытый прямоугольник  $30 \times 20$  не может накрыть более 3 узлов решетки.

Поскольку у прямоугольника  $35 \times 25$  диагональ короче 60, этот прямоугольник может покрывать узлы лишь из трех строк и трех столбцов решетки. Таких узлов девять (рис. 9). Занумеруем их. Допустим, что наш прямоугольник накрыл более 4 узлов. Если при этом не покрыт ни один из узлов 1, 3, 7, 9, то покрыты все остальные, в том числе — узлы 2, 6, 8, 4, образующие квадрат ширины  $20\sqrt{2}$ , большей 25, а такой квадрат нельзя покрыть полосой ширины 25. Значит, покрыт один из узлов 1, 3, 7, 9. Пусть это узел 1. Из того, что диагональ прямоугольника  $35 \times 25$  короче  $20\sqrt{5}$ , следует, что при покрытом узле 1 заведомо не покрыты узлы 6, 8, 9. По предположению покрыто более четырех узлов. Значит, покрыт хотя бы один из узлов 3 или 7. Пусть по-

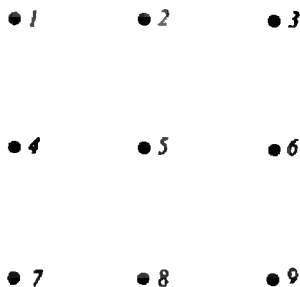


Рис. 9.

крыт узел 3, тогда не покрыты узлы 4 и 7. И узлов осталось всего четыре. Итак, даже замкнутый прямоугольник  $35 \times 25$  не может покрыть более 4 узлов решетки.

Осталось проверить, что открытый квадрат  $40 \times 40$  не может покрыть более пяти узлов. Диагональ этого квадрата короче 60, поэтому он может покрывать узлы только из трех строк и трех столбцов таблицы. Воспользуемся уже имеющимся рисунком 9. Допустим, что открытый квадрат покрывает более пяти из этих узлов. Тогда он покрывает хотя бы один из узлов 1, 3, 7, 9. Пусть именно узел 1. При этом заведомо не покрыт узел 9. Если не покрыты ни узел 3, ни узел 7, то покрыты все оставшиеся, в том числе 6 и 8. Но узлы 1, 6, 8 образуют рассмотренный выше треугольник  $T_2$ , который не может быть покрыт открытым квадратом  $40 \times 40$ . Значит, покрыт один из узлов 3 или 7. Пусть покрыт узел 3 (тогда узел 7 не покрыт). При покрытых узлах 1 и 3

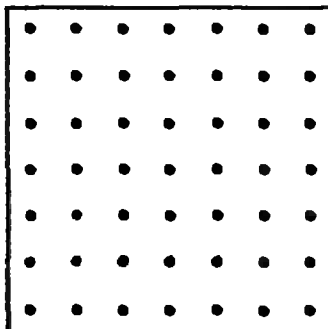


Рис. 10.

узел 8 не может быть покрыт, так как узлы 1, 3, 8 образуют рассмотренный ранее треугольник  $T_1$ , который не может быть покрыт открытым квадратом  $40 \times 40$ . Остается считать, что покрыты точки 1, 2, 3, 4, 5, 6. Но они образуют замкнутый прямоугольник  $40 \times 20$ , который, как было показано, не может быть покрыт открытым квадратом  $40 \times 40$ .

Закончим гипотезой. Если в квадрате  $70 \times 70$  разместить 49 центров (рис. 10), так чтобы они образовывали узлы решетки с шагом 10, то эксперимент с шаблонами подсказывает, что открытым квадратом  $40 \times 40$  нельзя покрыть более 17 узлов, прямоугольником  $35 \times 25$  — более 12, открытым прямоугольником  $30 \times 20$  — более 7, открытым кругом радиуса 10 — более 4.

Однако строгая проверка этой гипотезы неминуемо будет громоздкой, и поэтому мало интересна. Но если гипотеза верна, то в условиях исходной задачи хватает места даже не для двух, а для пяти кругов радиуса 5.

(Начало см. на с. 2)

к классу бильярдных задач. Типичный пример бильярдной системы — это шарик, движущийся внутри замкнутой оболочки и абсолютно упруго отражающийся от ее стенок. Обсуждению таких систем посвящена недавно вышедшая интересная книга Г. Гальперина и А. Землякова «Математические бильярды»<sup>\*)</sup>.

<sup>\*)</sup> М.: Наука, 1990, Библиотечка «Квант».

Конечно, слишком мало было сказано о главной героине этой статьи — о геодезической. Передо мной увлекательная книга Л. Люстерника «Кратчайшие линии»<sup>\*)</sup>. К сожалению, она не переиздавалась с 1955 года. Но если вам повезет и вы сможете достать ее, то обязательно прочтите — узнаете много интересного.

<sup>\*)</sup> М.: Гостехиздат, 1955.



*Арт-стихикии абитуриента*

## Необходимые условия и задачи с параметрами

П. ГОРНШТЕИН, В. ПОЛОНСКИЙ, М. ЯКИР

Любителям детективов хорошо знакома стандартная схема: круг подозреваемых постепенно сужается, и, наконец, великий мсье Пуаро обнаруживает преступника. Оказывается, подобный сюжет реализуется в целом классе математических задач. Вот пример.

Надо решить уравнение  $f(x)=g(x)$ . Сначала все множество действительных чисел подозревается в том, что они — корни уравнения. Исключим те, у которых есть очевидное алиби: корни нашего уравнения не могут встретиться за пределами областей определения функций  $f$  и  $g$ .

Если удалось установить, что все корни уравнения лежат в некотором

множестве  $M$ , тем самым появляется необходимое условие, при котором осуществляется равенство  $f(x)=g(x)$ : если  $x$  — корень уравнения, то  $x \in M$ . Будем называть задачи, решаемые таким методом, задачами с поиском необходимых условий.

Проиллюстрируем сказанное на конкретных примерах.

**Задача 1** (МГУ, 1983 г.). *Решите неравенство*

$$(\sqrt{x^2-5x+6}+1) \log_3 \frac{2x}{5} + \frac{1}{x} \sqrt{10x-2x^2-12} \leq 0.$$

Областью определения этого неравенства является двухэлементное множество  $\{2; 3\}$ . Проверка показывает, что неравенству удовлетворяет только  $x=2$ .

**Задача 2.** *При каких значениях параметра  $a$  система уравнений*

$$\begin{cases} a(x^4+1)=y+1-|x|, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

*имеет единственное решение.*

Очевидно, что если  $(x_0; y_0)$  — решение системы, то  $(-x_0; y_0)$  также является ее решением. Поэтому условие  $x=0$  — необходимое для существования единственного решения. Заметьте, что оно не является достаточным: наша система может иметь несколько решений вида  $(0; y_0)$  или вообще не иметь решений.

Положим  $x=0$ . Тогда

$$\begin{cases} a=y+1, \\ y^2=1. \end{cases}$$

Отсюда  $a=0$  или  $a=2$ .

Итак, искомые значения параметра надо выбрать в множестве  $\{0; 2\}$ . При  $a=0$  получаем:

$$\begin{cases} y+1-|x|=0, \\ x^2+y^2=1, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} |x|=y+1, \\ y^2+2y+1+y^2=1, \end{cases}$$

поэтому

$$\begin{cases} x=1, \\ y=0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x=-1, \\ y=0, \end{cases}$$

или 
$$\begin{cases} x=0, \\ y=-1. \end{cases}$$

Как видите, нашлось три решения системы, значит,  $a=0$  не удовлетворяет условию задачи.

При  $a=2$  получим:

$$\begin{cases} 2x^4 + |x| = y - 1, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Очевидно,  $2x^4 + |x| \geq 0$ . Из первого уравнения имеем  $y \geq 1$ , из второго —  $y \leq 1$ . Следовательно,  $y=1$ , значит,  $x=0$ . Проверка показывает, что пара  $(0; 1)$  — решение, а в силу ограничения для переменной  $y(y \geq 1$  и  $y \leq 1)$  оно единственно.

Ответ:  $a=2$ .

**Задача 3 (МГУ, 1990 г.).** При каких значениях параметра с уравнение  $x^2 - 2c \sin(\cos x) + 2 = 0$  имеет единственное решение?

Очевидно,  $x=0$  — необходимое условие для существования единственного корня данного уравнения.

При  $x=0$  имеем

$$c = \frac{1}{\sin 1}.$$

Докажем, что это значение параметра — искомое.

Действительно, при  $c = \frac{1}{\sin 1}$  получаем

$$x^2 + 2 = \frac{2}{\sin 1} \sin(\cos x). \quad (1)$$

Очевидно,  $x^2 + 2 \geq 2$ . Рассмотрим функцию  $f(t) = \sin t$ . Для  $t \in [-1; 1] \subset [-\pi/2; \pi/2]$  функция  $f$  возрастает. Следовательно,  $\sin(\cos x) \leq \sin 1$ . Отсюда

$$\frac{2 \sin(\cos x)}{\sin 1} \leq \frac{2 \sin 1}{\sin 1} = 2.$$

Значит, уравнение (1) эквивалентно системе

$$\begin{cases} x^2 + 2 = 2, \\ \frac{2 \sin(\cos x)}{\sin 1} = 2, \end{cases}$$

имеющей единственное решение  $x=0$ .

Ответ:  $c = \frac{1}{\sin 1}$ .

**Задача 4 (МГУ, 1988 г.).** Найдите все значения параметра  $a$ , при кото-

рых эквивалентны системы

$$\begin{cases} x + 2y = 2 - a, \\ -x + ay = a - 2a^2 \end{cases} \quad (2)$$

и

$$\begin{cases} x^2 - y^4 - 4x + 3 = 0, \\ 2x^2 + y^2 + (a^2 + 2a - 11)x + 12 - 6a = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Система (2) состоит из двух линейных уравнений с двумя переменными. Она имеет единственное решение, если  $a \neq -2$ .

Непосредственной проверкой устанавливаем, что при  $a = -2$  система (2) не имеет решений.

Система (3) при  $a = -2$  становится такой:

$$\begin{cases} x^2 - y^4 - 4x + 3 = 0, \\ 2x^2 + y^2 - 11x + 24 = 0. \end{cases}$$

Второе уравнение содержит квадратный трехчлен относительно  $x$ :  $2x^2 - 11x + 24$ . Его дискриминант отрицателен, поэтому второе уравнение решений не имеет.

Таким образом,  $a = -2$  удовлетворяет условию задачи.

Пусть теперь  $a \neq -2$ . В этом случае первая система имеет единственное решение, поэтому для эквивалентности систем (2) и (3) необходимо, чтобы и вторая система имела единственное решение. (Заметим, что достаточным условием их эквивалентности будет совпадение решений.)

Здесь, как и в задаче 1, условие  $y=0$  является необходимым для существования единственного решения системы (3) (проверьте!). При  $y=0$  вторая система примет вид

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0, \\ 2x^2 + (a^2 + 2a - 11)x + 12 - 6a = 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} x=1, \\ a^2 - 4a + 3 = 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x=3, \\ a^2 = 1. \end{cases}$$

Следовательно, искомые значения параметра  $a$ , если они существуют, принадлежат множеству  $\{-1; 1; 3\}$ . При  $a = -1$  система (2) такова:

$$\begin{cases} x + 2y = 3, \\ -x - y = -3. \end{cases}$$

Она имеет единственное решение (3; 0). Вторая же система принимает вид

$$\begin{cases} x^2 - y^4 - 4x + 3 = 0, \\ 2x^2 + y^2 - 12x + 18 = 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x^2 - y^4 - 4x + 3 = 0, \\ 2(x-3)^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

Отсюда  $x=3, y=0$ . Поскольку решения систем совпали,  $a=-1$  удовлетворяет условию задачи.

При  $a=1$  легко установить, что система (2) имеет единственное решение  $-(1; 0)$ , а система (3) имеет два решения  $-(1; 0), (3; 0)$ .

При  $a=3$  система (2) имеет единственное решение  $(\frac{27}{5}; -\frac{16}{5})$ , не удовлетворяющее системе (3).

Ответ:  $a=-2$  или  $a=-1$ .

Задача 5 (КПИ, 1989 г.). При каких целых отрицательных  $n$  функция  $f(x) = \cos nx \sin \frac{15x}{n^2}$  удовлетворяет условию  $f(x+5\pi) = f(x)$  для всех  $x \in R$ .

$$\begin{aligned} \text{По условию задачи равенство} \\ \cos n(x+5\pi) \sin \frac{15}{n^2}(x+5\pi) = \\ = \cos nx \sin \frac{15x}{n^2} \end{aligned}$$

должно выполняться при любом действительном  $x$ , а следовательно, и при  $x=0$ .

В этом случае имеем

$$\cos 5n\pi \cdot \sin \frac{75\pi}{n^2} = 0.$$

Так как  $\cos 5n\pi \neq 0$ , то  $\sin \frac{75\pi}{n^2} = 0$ , т. е.  $\frac{75}{n^2} = k$ , где  $k$  — целое. Отсюда  $n^2 = 1$  или  $n^2 = 25$ . Нас интересуют лишь отрицательные значения  $n$ , поэтому решения задачи следует искать в множестве  $\{-1; -5\}$ . Проверка показывает, что и при  $n=-1$ , и при  $n=-5$  наше равенство выполняется при всех действительных  $x$ .

Ответ:  $n=-1$  или  $n=-5$ .

Читатель, конечно, спросит, почему мы подставили в наше равенство именно  $x=0$ ? Можно, разумеется, подставить какое-нибудь другое зна-

чение  $x$ : ведь равенство должно выполняться при любом  $x$ . Но  $x=0$  гораздо удобнее в обращении и не дает громоздких формул. В подобных случаях выбор наиболее выгодных значений переменной часто основывается на интуиции и личном опыте.

Задача 6 (МГУ, 1989 г.). Найдите все  $c$  такие, что при любом  $b$  система

$$\begin{cases} (1+3x^2)^c + (b^2 - 4b + 5)^y = 2, \\ x^2y^2 - (2-b)xy + c^2 + 2c = 3. \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Данная система должна иметь хотя бы одно решение при любом  $b$ , а значит, и при  $b=2$ . В этом случае

$$\begin{cases} (1+3x^2)^c = 1, \\ x^2y^2 + c^2 + 2c = 3, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} x=0, \\ c^2 + 2c = 3 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} c=0, \\ x^2y^2 = 3. \end{cases}$$

Круг «подозреваемых» значений для переменной  $c$  сузился до множества  $\{-3; 0; 1\}$ .

При  $c=-3$  получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+3x^2)^3} + (b^2 - 4b + 5)^y = 2, \\ x^2y^2 - (2-b)xy = 0. \end{aligned}$$

Очевидно, эта система имеет решение  $(0; 0)$  при любом  $b$ .

При  $c=0$

$$\begin{aligned} (b^2 - 4b + 5)^y = 1, \\ x^2y^2 - (2-b)xy = 3. \end{aligned}$$

Если  $b \neq 2$ , то решение первого уравнения  $y=0$  не удовлетворяет второму уравнению. Но по условию система должна иметь решение при любых  $b$ , значит,  $c=0$  придется исключить из списка «подозреваемых».

При  $c=1$

$$\begin{cases} 3x^2 + (b^2 - 4b + 5)^y = 1, \\ x^2y^2 - (2-b)xy = 0. \end{cases}$$

Очевидно, эта система имеет решение  $(0; 0)$  при любом  $b$ .

Ответ:  $c=1$  или  $c=-3$ .

Задача 7 (МАИ, 1989 г.). При каких  $x$  для любого  $y$  существуют  $z$  такие, что



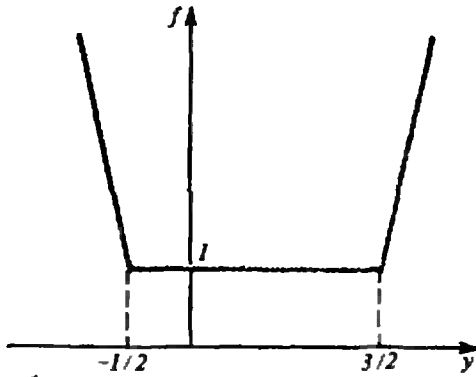


Рис. 1.

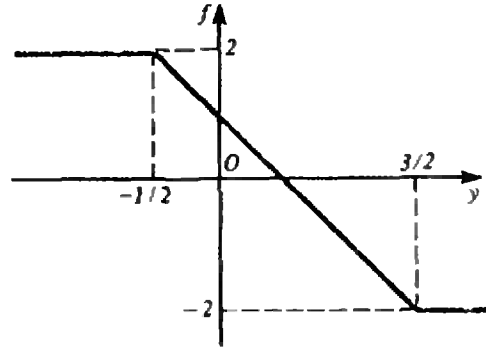


Рис. 2.

$$\sin(x+y+z) =$$

$$= \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \left|y + \frac{1}{2}\right| + \frac{|y-3/2|}{2 \cos x} ?$$

Подставим в уравнение  $y = -1/2$ . Тогда

$$\sin\left(x+z - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\cos x},$$

откуда  $\cos x = 1$  или  $\cos x = -1$ . При  $\cos x = 1$ , т. е.  $x = 2\pi k$ ,  $k$  — целое, получим

$$\sin(2\pi k + y + z) =$$

$$= \cos\left(4\pi k + \frac{\pi}{3}\right) \left|y + \frac{1}{2}\right| + \frac{|y-3/2|}{2},$$

следовательно,

$$\sin(y+z) = \frac{|y+1/2|}{2} + \frac{|y-3/2|}{2}.$$

Имеем

$$|\sin(y+z)| \leq 1,$$

но

$$\frac{|y+1/2|}{2} + \frac{|y-3/2|}{2} \geq 1.$$

На рисунке 1 приведен график функции

$$f(x) = \frac{|y+1/2|}{2} + \frac{|y-3/2|}{2}.$$

Видно, что равенство из условия задачи при  $x = 2\pi k$  выполняется не для всех  $y$ , а лишь для  $y \in [-1/2; 3/2]$ .

При  $\cos x = -1$ , т. е.  $x = \pi + 2\pi k$ ,  $k$  — целое, получим

$$\sin(\pi + 2\pi k + y + z) =$$

$$= \cos\left(2\pi + 4\pi k + \frac{\pi}{3}\right) \left|y + \frac{1}{2}\right| + \frac{|y-3/2|}{2 \cos(\pi + 2\pi k)},$$

откуда

$$2 \sin(y+z) = |y-3/2| - |y+1/2|.$$

Поскольку

$$|2 \sin(y+z)| \leq 2,$$

то должно выполняться неравенство

$$||y-3/2| - |y+1/2|| \leq 2.$$

На рисунке 2 изображен график функции

$$f(y) = \left| |y-3/2| - |y+1/2| \right|.$$

В этом случае для любого  $y$  можно подобрать  $z$  такое, что равенство (4) будет выполнено.

Ответ:  $x = \pi + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Задача 8 (МАИ, 1988 г.). При каких значениях параметра  $a$  уравнения

$$\sin 2x + a = \sin x + 2a \cos x$$

и

$$2 \cos 2x + a^2 = 5a \cos x - 2$$

эквивалентны?

Легко видеть, что  $x = \frac{\pi}{3}$  — корень первого уравнения при любом  $a$ . Для

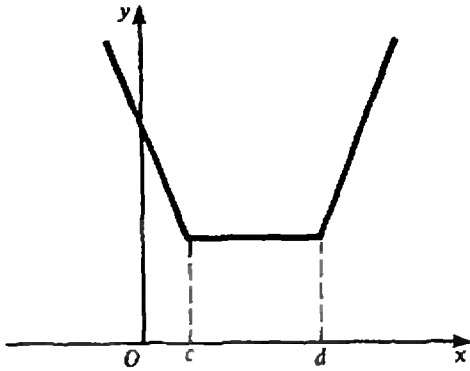


Рис. 3.

эквивалентности уравнений необходимо, чтобы он был также и корнем второго уравнения.

При  $x = \frac{\pi}{3}$  получаем

$$-1 + a^2 = \frac{5a}{2} - 2,$$

отсюда претенденты на ответ —  $a = 2$  и  $a = 1/2$ .

При  $a = 2$  первое уравнение приобретает вид

$$\sin 2x + 2 = \sin x + 4 \cos x,$$

а второе —

$$\cos 2x - 5 \cos x + 3 = 0.$$

Читатель легко убедится сам, что каждое из двух последних уравнений эквивалентно уравнению  $\cos x = 1/2$ .

При  $a = 1/2$  первое уравнение становится таким:

$$\sin 2x + 1/2 = \sin x + \cos x,$$

а второе — таким:

$$2 \cos 2x + \frac{1}{4} = \frac{5}{2} \cos x - 2.$$

Очевидно, что корень первого из них  $x = -\frac{\pi}{3}$  не является корнем второго.

Ответ:  $a = 2$ .

Во всех предыдущих задачах достаточные условия для искомых значений параметра устанавливались в результате проверки. Возможен, однако, и другой подход.

Поскольку каждое достаточное условие является необходимым, но не каждое необходимое условие является достаточным, ясно, что последователь-

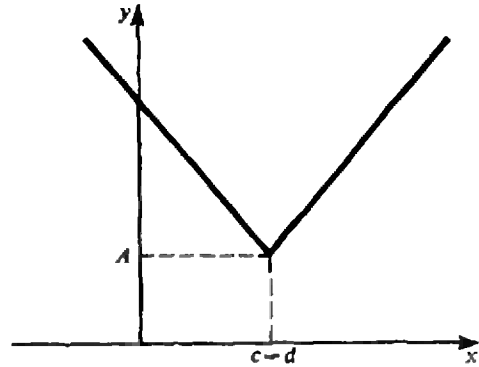


Рис. 4.

ным усилением необходимого условия можно в конце концов свести его к достаточному.

В заключение приведем пример, отражающий вышесказанное.

Задача 9 (МГУ, 1988 г.). При каких значениях параметров  $a$  и  $b$  уравнение

$$|x + \cos^2 4a - 2 \sin a \cos^4 4a| + |x + \sin^2 a| = b \left( a + \frac{3\pi}{2} \right)$$

имеет единственное решение?

Рассмотрим функцию  $f(x) = |x - c| + |x - d| + e$  ( $c, d$  и  $e$  — некоторые числа). Не нарушая общности рассуждений, положим  $d > c > 0, e > 0$ . График рассматриваемой функции схематично изображен на рисунке 3.

Очевидно, что уравнение  $f(x) = A$  имеет единственный корень при  $c = d$  (рис. 4).

Поэтому для того, чтобы уравнение  $f(x) = 0$  имело единственный корень, достаточно выполнения условий  $c = d$  и  $e = 0$  (рис. 5).

Итак, для нахождения искомых значений параметров  $a$  и  $b$  достаточно решить систему

$$\begin{cases} \sin^2 a = 2 \sin a \cos^4 4a - \cos^2 4a, \\ b \left( a + \frac{3\pi}{2} \right) = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим первое из ее уравнений:

$$\sin^2 a - 2 \sin a \cos^4 4a = -\cos^2 4a.$$

Добавим к обеим его частям  $\cos^6 4a$ :

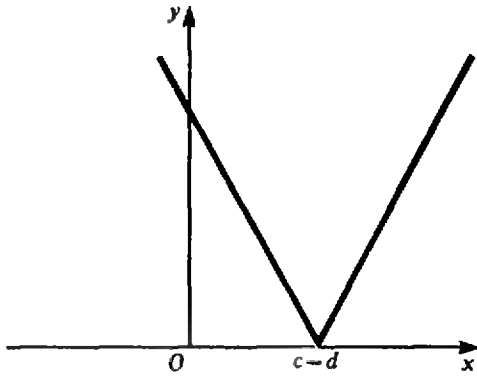


Рис. 5.

$$\sin^2 a - 2 \sin a \cos^4 4a + \cos^8 4a = \cos^8 4a - \cos^2 4a.$$

Тогда

$$(\sin a - \cos^4 4a)^2 = \cos^8 4a - \cos^2 4a.$$

Правая часть полученного уравнения неположительна:

$\cos^8 4a - \cos^2 4a = \cos^2 4a(\cos^6 4a - 1) \leq 0$ , значит, уравнение имеет решение лишь при

$$\begin{cases} \sin a = \cos^4 4a, \\ \cos 4a = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sin a = \cos^4 4a, \\ \cos^6 4a = 1. \end{cases}$$

Первая из этих систем дает  $a = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ ,  $k$  — целое.

Из второй получим, что, с одной стороны,  $a = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}$ , а с другой —  $a = \pi k$ , но при целых  $k$  этого быть не может.

Тогда имеем

$$\begin{cases} a = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ b \left( a + \frac{3\pi}{2} \right) = 0, \text{ т. е.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ b = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ a = -\frac{3\pi}{2}, \\ b - \text{любое.} \end{cases}$$

Ответ:  $b=0$ ,  $a = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ ,  $k$  — целое, или  $a = -\frac{3\pi}{2}$ ,  $b$  — любое действительное число.

**Задачи для самостоятельного решения**

1 (МГУ, 1990 г.). При каких значениях параметра  $b$  уравнение

$$2x^2 - b \operatorname{tg} x + b^2 = 0$$

имеет единственное решение?

2 (МГУ, 1987 г.). Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^{|x|} + 5|x| + 4 = 3y + 5x^2 + 3a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

3 (МИРЭА, 1983 г.). При каких значениях параметра  $a$  система неравенств

$$\begin{cases} y \geq (x+y)^2 - x - 2y - a, \\ x \geq (y-x)^2 - 3y + 2x + a \end{cases}$$

имеет единственное решение?

4 (МАИ, 1989 г.). При каких действительных значениях  $x$ , для любого действительного  $y$ , найдется такое  $z$ , что

$$\begin{aligned} \cos(2x - y + z) = \\ = |y^3 - 1| \cos\left(\frac{4\pi}{3} - 2x\right) + \frac{|y^3 + 1|}{2 \sin x} ? \end{aligned}$$

5 (МГУ, 1978 г.). Найдите множество всех пар чисел  $(a; b)$ , для каждой из которых при всех  $x$  справедливо равенство

$$a \sin x + b = \sin(ax + b).$$

6 (Уральский ГУ, 1976 г.). Найдите такие значения параметра  $a$ , при каждом из которых неравенство

$$\sqrt{x^2 + 4x + 7} \leq x + 3$$

и уравнение

$$2^{x+2} - |2^{x+1} - a| = 2^{x+1} + 1$$

равносильны.

7 (МГУ, 1974 г.). Найдите все действительные значения  $\alpha$ , для каждого из которых существуют четыре целых числа  $(x, y, u, v)$ , удовлетворяющие равенствам

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (107 - \alpha)(\alpha - 91), \\ 54(u^2 - v^2) &= \alpha(15u + 3v - \alpha). \end{aligned}$$

# Информатика и программирование

## Алгоритмика простоты

*В сто раз быстрее*

Б. ТАРАСЕНКО

*Нелегкий вопрос-то  
Но верь одному:  
Все сложно и просто.  
Считай, по уму!*

Современный олимпийский девиз гласит: выше, быстрее, дальше. Компьютерный звучит почти так же. Можно, пожалуй, еще добавить: точнее, дешевле, чище, экономичнее, безопаснее, доступнее. Портативная карманная вычислительная техника достигает максимума по многим из этих критериев, так что за ее прогрессом стоит следить. Сегодня речь пойдет о микрокомпьютере «Электроника МК-85» (с алгоритмическим языком Бейсик). Он внешне достаточно привлекателен, надежен в работе, при умеренной цене в классе автономных портативных устройств обладает сравнительно широким набором вычислительных возможностей. Розничная продажа и круг пользователей МК-85 расширяются, поэтому мы предлагаем вашему вниманию Бейсик-программу № 6 «Реверсивный генератор простых чисел».

При первом знакомстве с чем-то новым лучше всего — сравнить новое со старым. Мы взяли простое число 100003, похожие по организации и назначению программы для МК-52, МК-85 (в нормальном и ускоренном режимах счета) и для HP-32S (США) и определили время  $T$ , требуемое каждому из них для подтверждения простоты этого числа. Тестовое простое число выбрано так, чтобы можно было спокойно засесть время работы «чемпиона» и не очень соскучиться, замеряя время «аутсайдера». Кроме то-

го, мы провели краткое технико-экономическое сравнение: учли разрядность разных устройств, затронули и такой «параметр», как цена (карманные компьютеры-калькуляторы везде относительно доступны для массового потребителя). Говорят (особенно часто — в США), что время — деньги. С учетом этого принципа мы разрядность каждого устройства разделили на цену (на июнь 1991 г., курс доллара к рублю определим как 1 к 40) и на время работы, а потом разделили все на итоговый параметр самого медленного устройства (МК-52). Все характеристики и результаты вычислений вы видите в таблице.

	МК-52	МК-85 (н)	МК-85 (у)	HP-32S
$T$ (с)	874	60	10	14
Разрядность	8	10	10	12
Цена	115 р.	270 р.	270 р.	82 \$
Итого	1	7,8	46,3	3,3

Итак, МК-85, чемпион в рассматриваемой группе, работает существенно быстрее МК-52, даже HP-32S работает в полтора раза медленнее. С коммерческой точки зрения, если судить по ценам и нашим вычислениям, покупать МК-85 тоже выгодно.

Перейдем к чисто программной части. Предложенный вашему вниманию генератор простых чисел на Бей-

### Программа № 6. РЕВЕРСИВНЫЙ ГЕНЕРАТОР ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

```

1 PRINT «ГЕНПРОСТЧИСЛ»
2 INPUT «H=», P
3 FOR D=3 TO P STEP 2
4 K=P/D: M=INT K
5 IF K=M THEN 8: IF D>K THEN 7
6 NEXT D
7 PRINT «P=»: P
8 P=P+2: GOTO 3
9 FOR D=3 TO P STEP 2
10 K=P/D: M=INT K
11 IF K=M THEN 14: IF D>K THEN 13
12 NEXT D
13 PRINT «P=»: P
14 P=P-2: GOTO 9

```

сике на самом деле содержит две программы: нарастающую, операторы 1—8, и убывающую, операторы 9—14. Обе они размещены в одном файле, для определенности — в PO (красный цвет на клавиатуре).

Чтобы запустить эту программу (например, первую), можно сделать следующие операции: ввести ее, например, в файл PO, затем нажать клавишу S (красную), затем PO (красную), на индикаторе появится ГЕНПРОСТЧИСЛ, нажать клавишу EХЕ, в ответ на запрос  $N=?$  набрать нечетное стартовое число (например, пять) и нажать EХЕ. На индикаторе появится  $P=5$ . При последующих нажатиях клавиши EХЕ на индикаторе будут появляться очередные простые числа:  $P=7$ , затем  $P=11$  и так далее.

Другой способ запуска: S (красное), RUN (красное) 1, EХЕ, ГЕНПРОСТЧИСЛ и дальше — как в предыдущем примере.

Вторая ветвь программы (операторы 9—14) ищет простые числа, меньшие заданного. Чтобы ее запустить, надо сделать следующие операции: нажать клавишу S (красную), затем PO (красное), RUN (красное) 9, EХЕ и пойдут простые числа на уменьше-

ние. При этом стартовое число вводится через «нарастающую» часть программы.

В заключение приведем простые числа на «подходе» к очередной степени десяти: 7, 97, 997, 9973, 99991, 999983, 9999991, 99999989, 999999937, 9999999967, 99999999977 и 299999999909. Последнее число — это технический предел HP-32S.

### Примечания

Заманчиво убрать вспомогательные переменные K и M. Но в результате этого скорость работы упадет примерно вдвое. Если в строку 4 добавить оператор  $C=P-M \cdot D$  и простоту числа определять по остатку, изменив соответствующим образом условные операторы в строке 5, то быстрое действие падает на 25 %, но зато верхний предел работоспособности будет 9999999967. При работе у верхнего предела на поиск очередного простого числа уходит примерно час.

Для приведенной программы верхний предел работоспособности еще надо найти (он меньше). Это — наша маленькая хитрость: не без пользы для себя вы можете проделать все эти вычисления самостоятельно.

## ***Тому, кто любит прекрасное***

*Прекрасные спектры вы сможете пронаблюдать,  
если сделаете спектроскоп,  
воспользовавшись нашими голографическими дифракционными решетками.*

*Для получения дифракционной решетки  
и инструкции по сборке спектроскопа  
вышлите почтовым переводом 6 рублей по адресу:*

**427600, г. Глазов, ул. К. Маркса, д. 27, а/я 76, МНП «Аргон».**

*На бланке перевода четко укажите обратный адрес.*



## Игры и головоломки

### Ханойская башня

Эта головоломка известна уже довольно давно. Ее автором принято считать французского математика Э. Люка, создавшего ее на основе древних легенд. В русской литературе она впервые появилась, видимо, в 1902 году в книге Е. Игнатьева «В царстве смекалки». Об этой книге мы недавно рассказывали в нашем журнале («Квант» № 4, 1991 г.). Многие авторы книг по программированию, очарованные простотой и изяществом «ханойской башни», описывали алгоритм ее решения.

Что же представляет из себя эта головоломка, которую иногда именуют «Башней браминов», а Е. Игнатьев называет «Детской пирамидкой»? Если вы возьмете детскую пирамиду (диски располагаются в порядке возрастания: верхний — самый маленький, а нижний — самый большой) и еще два стержня от таких же детских пирамид, то головоломка уже у вас в руках (рис. 1).

Занумеруем стержни: тот, на котором находятся диски, получит номер I, другие — номера II и III. Задача состоит в том, чтобы перенести диски со стержня I на стержень III, используя стержень II, как промежуточный. При этом должны соблюдаться два условия: 1) за один ход можно перенести лишь один диск, 2) нельзя класть больший диск на меньший.

Существует легенда, что в индийском городе Бенаресе бог Брами поставил в одном из храмов на бронзовой площадке три алмазные палочки толщиной в корпус пчелы, на одну из них он надел 64 золотых диска, и с момента сотворения мира без устали, сменяя друг друга, жрецы переносят диски с одной палочки на другую в соответствии с описанными правилами. Когда жрецы перенесут все диски с первой палочки на третью, — гласит легенда, — наступит конец света.

Давайте разберемся, как же перенести диски с первого стержня на третий, а заодно выясним, скоро ли наступит обещанный конец света.

Если бы в пирамиде был только один диск, то решение очевидно — перенесем его на третий стержень, и дело с концом. Мы выполнили требуемое задание за один ход. А если бы было два диска? Тогда положим сначала меньший диск на второй стержень, затем положим второй диск на третий стержень, затем перенесем и меньший диск на третий стержень, положив его поверх второго. Все. За три действия мы смогли переложить оба диска на третий стержень. Отметим, что  $1=2^1-1$ , а  $3=2^2-1$ . Теперь предположим, что мы умеем перекладывать на третий стержень пирамиду из  $n$  дисков за  $2^n-1$  действие. Покажем, что в таком случае можно перенести на третий стержень и пирамиду из  $n+1$  дисков, притом за  $2^{n+1}-1$  действие.

Действительно, пусть на пирамиде лежит  $n+1$  дисков. На время изменим нумерацию стержней: второй назовем треть-

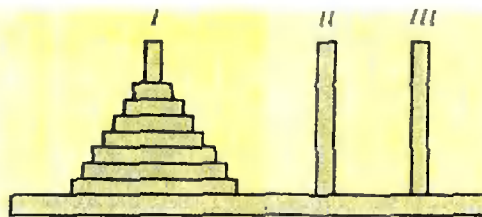


Рис. 1.

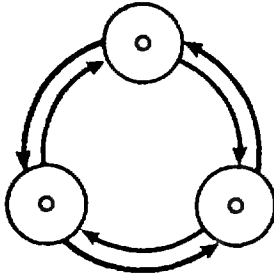


Рис. 2.

им, а третий — вторым. Теперь мы можем перенести  $n$  верхних дисков с первого стержня на третий, произведя  $2^n - 1$  действие. На первом стержне остался лишь один диск. Перенесем его на свободный второй стержень. Снова перенумеруем стержни: вернем второму стержню номер три, первому дадим номер два, а третьему — номер один. Теперь у нас на первом стержне лежит  $n$  дисков, второй — свободен, а на третьем лежит самый большой диск. Осталось перенести с первого стержня на третий  $n$  дисков, что мы умеем делать за  $2^n - 1$  операцию. Все. Мы собрали на третьем стержне все  $n+1$  дисков, совершив  $(2^n - 1) + 1 + (2^n - 1) = 2^{n+1} - 1$  действие.

Отсюда, в соответствии с принципом математической индукции, вытекает, что для любого натурального числа  $k$  можно, имея пирамиду с  $k$  дисками, перенести их с первого стержня на третий, соблюдая правила, за  $2^k - 1$  действие.

Приведенное доказательство нетрудно оформить в виде алгоритма действий. Именно такой алгоритм и предлагается программистам в упомянутых книгах для его записи на том или ином алгоритмическом языке.

Нетрудно показать, что меньше чем за  $2^k - 1$  действие перенести  $k$  дисков с первого стержня на третий невозможно. Поэтому легендарным жрецам понадобится  $2^{64} - 1$  действие, чтобы исполнить свою работу. Если тратить на каждое действие лишь по одной секунде, то понадобится 18 446 744 073 709 551 615 с, т. е. более 500 миллиардов лет.

Присмотримся повнимательнее к процессу переноса дисков. Для этого перенумеруем их в порядке возрастания: первый — самый маленький и т. д. Теперь начнем переносить диски в соответствии с алгоритмом и будем записывать номера переносимых дисков:

1213121412131215121312141...

Любопытно, что каждый нечетный перенос — это перенос первого диска. Еще одно наблюдение: расположим стержни в вершинах равностороннего треугольника (рис. 2) и понаблюдаем за движением первого диска. Оказывается, что он движется по кругу в одну и ту же сторону; при этом, если начальное количество дисков четно, то по часовой стрелке, а если нечетно — против. Эти наблюдения позволили в 1961 году сформулировать следующий алгоритм переноса дисков:

*сначала переносим первый диск, потом не первый, затем снова первый, потом не первый и т. д., причем первый диск переносится в одном направлении: по часовой стрелке в случае четного количества дисков и против часовой стрелки, в случае их нечетного количества.*

Заметим, что указание «переносится не первый диск» полностью определяет, какой диск и куда следует переносить в данный момент, поскольку меньший диск всегда кладется на больший.

Недавно школьник из г. Перми *Миша Федоров* предложил еще один алгоритм, осуществляющий, как и только что описанный, перенос  $k$  дисков с первого стержня на третий за  $2^k - 1$  действие.

Миша вводит понятие «пустой башни». Стержни с нанизанными на них дисками он называет башнями, а башню, которая не участвует в операции переноса диска в этот момент, называет пустой. Алгоритм М. Федорова формулируется очень коротко:

*в процессе переключивания пустая башня должна двигаться по кругу в одном и том же направлении: по часовой стрелке, если число дисков нечетно, и против часовой стрелки, если их число четно.*

Свою работу Миша Федоров с успехом доложил на Всесоюзной научно-технической конференции школьников. Заметим, что если первый алгоритм приводит к необходимому результату по построению, то справедливость второго и третьего следует доказывать, и это не очень просто. Хотя на самом деле все три алгоритма являются просто различными записями одного и того же процесса переноса дисков.

Существенно другой процесс возникает в том случае, если еще усложнить правила переноса. Наш читатель *А. Тарасенко* предлагает найти алгоритм, позволяющий переносить диски с первого стержня на третий, в котором первый диск ни разу не оказывался бы на

втором стержне. Он утверждает, что такая процедура возможна за  $2 \cdot 3^{k-1} - 1$  действие. Если же запретить второму диску оказываться на втором стержне, то количество перекладываний становится равным  $2^2 \cdot 3^{k-2} - 1$ . И вообще, если запретить класть на второй стержень  $n$ -й диск, то понадобится  $2^n \cdot 3^{k-n} - 1$  действие.

Еще об одной модификации этой головоломки мы писали в предыдущем номере журнала (на 4 странице обложки). В. Пинаев предлагает рассмотреть вопрос: всегда ли возможно перенести диски с первого стержня на третий, если первоначально они лежали на первом стержне в произвольном порядке. Приводим доказательство того, что такое перекладывание всегда возможно.

Чтобы доказать возможность такого перекладывания, сначала разберемся с более простой задачей. Пусть требуется собрать пирамиду из дисков, нанизанных на два стержня, при свободном третьем, причем диски расположены на стержнях по возрастанию диаметров. Кроме того, предположим, что такую задачу мы уже умеем решать для любого меньшего количества дисков.

Пусть самый крупный диск находится на первом стержне, тогда чтобы собрать пирамиду на третьем стержне, необходимо сделать три операции:

- 1) собрать на втором стержне пирамиду без самого большого диска;
- 2) переместить самый большой диск на третий стержень;
- 3) переместить пирамиду со второго стержня на третий.

Все три операции мы можем сделать. Действительно, первую операцию мы можем сделать по предположению, вторая операция очевидна, а третья — обычное перемещение в головоломке «Ханойская башня», которое мы уже научились совершать.

Теперь вернемся к основной задаче. На первом стержне находятся диски в произвольном порядке, второй и третий стержни свободны. Постараемся разложить диски на втором и третьем стержнях в порядке возрастания. Начнем такое перекладывание и продолжим его, пока это возможно. При этом мы переложим не менее двух дисков. Если нам повезет, то мы сразу переложим все диски и перейдем к уже решенной задаче. А если не повезет? Пусть некоторый диск уже нельзя положить ни на второй, ни на третий стержень. Мысленно отделим на этих стержнях диски, меньшие рассмотренного диска. Соединим эти части вместе на втором стержне. Это мы уже научились делать. Теперь перенесем злощастный диск на третий стержень и тем самым мы устраним возникшую трудность. Можем продолжать перекладывание. В результате все диски окажутся собранными на втором и третьем стержнях, а теперь собирать из них башню мы уже умеем. Итак, доказательство закончено.

Можно рассмотреть и такую задачу: все диски разложены в произвольном порядке на всех трех стержнях, требуется собрать их на одном. Эта задача также всегда разрешима.

В. Пинаев предлагает назвать свою головоломку *П-башней*, что же, можно согласиться с таким названием. Заметим, что идея этой головоломки идет от кубика Рубика: запутаем расположение частей головоломки, а потом постараемся привести ее к первоначальному виду с помощью разрешенных действий.

В литературе рассматриваются «Ханойские башни» и с большим количеством стержней, например, в недавно вышедшей книге Ж. Арсака «Программирование игр и головоломок» (М.: Наука, 1990).

Публикацию подготовил А. Савин

#### Поправка

В «Кванте» № 9 за 1991 год на с. 78 в условии задачи № 4 Испанской математической олимпиады допущена опечатка. Вопрос задачи следует читать так: «Существует ли натуральное число  $m$  такое, что

$$\sum_{n=1}^m |a_n - a_{n+1}| = 1990?»$$

Примосим нашим читателям свои обвинения.



# Олимпиады

## XXV Всесоюзная олимпиада по математике

Доктор физико-математических наук  
Д. МИТЬКИН.

кандидат физико-математических наук  
С. РЕЗНИЧЕНКО

В этом году заключительный этап Всесоюзной олимпиады школьников по математике проходил в г. Смоленске с 17 по 24 апреля. На олимпиаду приехали команды всех республик (за исключением Грузии), команды городов Москвы, Ленинграда, физико-математических школ при университетах Ленинграда, Новосибирска, Киева, Еревана, Алма-Аты. Кроме того, в олимпиаде приняли участие учащиеся специализированных учебных центров при Московском государственном университете и Ленинградском дворце пионеров, учащиеся гимназии № 1 г. Риги, средней школы № 57 г. Москвы и команда г. Смоленска. Всего соревновались 175 школьников: 58 девятиклассников, 61 десятиклассник и 56 одиннадцатиклассников. Впервые участвовали в заключительном этапе Всесоюзной олимпиады школьников по математике гости из-за рубежа: 6 учащихся Британской школы из Бельгии. Были приглашены также наблюдатели из Болгарии, Испании, Китая и Греции.

Как и в прежние годы, заключительный этап олимпиады проходил в два тура, в каждом из которых предлагалось решить 4 задачи. На выполнение задания одного тура отводилось 5 часов. Оценки полных решений задач в баллах, из которых исходило жюри при определении призеров, приведены в таблице 1 (баллы назначались с учетом трудности задачи и с таким расчетом, чтобы суммарное число баллов за все задачи в туре по каждому классу равнялось 30). В таблицах 2—4 приведены данные о числе соответственно 9-, 10- и 11-классников, решивших задачу полностью (+) или с некоторыми недочетами ( $\pm$ ), а также данные о количестве работ, в которых решение содержало грубые ошибки ( $\mp$ ) или вовсе отсутствовало (—).

Победители заключительного этапа Всесоюзной олимпиады были награждены дипломами, грамотами, специальными призами и памятными подарками. Кроме того, оргкомитет олимпиады и жюри

определили трех школьников, по одному из каждого класса, для назначения им стипендий из фонда «Филантропия». Лучших результатов на олимпиаде добились: в 9 классе — *Каукис Валдис* (гимназия № 1 г. Риги), в 10 классе — *Амбайнис Андрис* (средняя школа № 12 г. Даугавпилса), в 11 классе — *Перлин Александр* (специализированный учебно-методический центр при Ленинградском дворце пионеров). Учащиеся из Бельгии выполняли задания 9 класса. Наибольшего успеха из них добился *Маунтин Артур*. Он получил диплом III степени.

Определение призеров почти никогда не бывает однозначным. У жюри, состоявшего из 52 человек, были сложности при обсуждении этого вопроса. Однако окончательное решение жюри, работу которого возглавляли председатель член-корреспондент АПН СССР, профессор Московского физико-технического института Г. Н. Яковлев и его заместители профессор Смоленского пединститута М. Б. Валк и доктор физико-математических наук, доцент Московского государственного университета Ю. В. Нестеренко, было единогласным. Тем не менее, решение жюри подверглось критике на закрытии олимпиады и от имени участников олимпиады и, в кулуарах, со стороны некоторых руководителей команд.

По результатам уже ставшего традиционным опроса школьников, проводимого членами жюри среди участников олимпиады, в каждом классе были определены лучшие конкурсные задачи. В 9 классе лучшими были признаны задачи 7, 8 и 4, занявшие соответственно первое, второе и третье места. Первое место в 10 классе заняла задача 4, второе — четвертое места, лишь немного уступив ей, разделили задачи 6, 7 и 8. В 11 классе лучшей признана задача 7, второе и третье места разделили задачи 6 и 8.

Компьютерный турнир для желающих, вошедший было в традицию, на этот раз не проводился. Но традиционный «математический бой» и встреча с членами редколлегии журнала «Квант» состоялись и, как обычно, вызвали большой интерес у участников олимпиады.

Культурная программа включала обзорные экскурсии по Смоленску, посещение городской картинной галереи и музея С. Т. Коненкова, музея-усадьбы М. И. Глики в Новоспасском и музея-усадьбы

Таблица 1

Класс \ Задача	1	2	3	4	5	6	7	8
9	6	7	а) 5 б) 5	7	а) 2 б) 5	6	8	9
10	5	6	9	10	6	7	8	9
11	5	6	7	а) 5 б) 7	5	9	8	8

Таблица 2  
(9 класс)

Оценка \ Задача	1	2	3	4	5	6	7	8
+	18	11	а) 1 б) 14	9	а) 47 б) 21	34	19	5
±	9	3	а) 3 б) 1	2	а) 0 б) 9	4	4	4
±	4	0	а) 3 б) 1	15	а) 1 б) 5	0	0	29
—	27	44	а) 51 б) 42	32	а) 10 б) 23	20	35	20

Таблица 3  
(10 класс)

Оценка \ Задача	1	2	3	4	5	6	7	8
+	48	38	13	8	41	27	19	14
±	2	1	3	2	3	3	3	2
±	1	5	15	3	1	8	2	1
—	10	17	30	48	16	23	37	44

Таблица 4  
(11 класс)

Оценка \ Задача	1	2	3	4	5	6	7	8
+	36	39	13	а) 14 б) 4	34	а) 36 б) 9	7	18
±	10	5	24	а) 4 б) 1	2	а) 2 б) 0	13	3
±	6	2	0	а) 2 б) 6	3	а) 7 б) 1	1	11
—	4	10	19	а) 36 б) 45	17	а) 11 б) 46	35	24

М. К. Тенищевой «Теремок», а также встречи участников олимпиады с учениками средних школ г. Смоленска. Ход олимпиады освещался по радио и в местной печати, был создан видеодневник олимпиады.

При всех объективных и необъективных трудностях олимпиада прошла успешно. И в этом немалая заслуга организаторов и хозяев олимпиады. Выражаем свою благодарность, а всем участникам олимпиады желаем дальнейших успехов.

Ниже приводятся условия задач, предлагавшихся на заключительном этапе XXV Всесоюзной олимпиады школьников по математике. Задачи, отмеченные звездочкой, вошли в «Задачник «Кванта».

**ЗАДАЧИ**

*Первый день*

9 класс

1. Решите в целых числах систему уравнений

$$\begin{cases}xz - 2yt = 3, \\ xt + yz = 1.\end{cases}$$

*Ю. Нестеренко*

2\*. На доске выписаны  $n$  чисел. Разрешается стереть любые два числа, скажем  $a$  и  $b$ , и вместо них записать одно число  $(a+b)/4$ . Эта операция повторяется  $n-1$  раз, и в результате на доске остается одно число. Докажите, что если на доске первоначально были выписаны  $n$  единиц, то в результате всех операций на доске останется число не меньше чем  $1/n$ .

*Б. Берлов*

3. На плоскости проведены четыре прямые так, что любые две из них пересекаются и никакие три не проходят через одну точку. На каждой из этих прямых три точки пересечения с остальными прямыми выделяют по два соседних отрезка. Всего образуется восемь отрезков. Могут ли длины этих отрезков равняться

- а) числам 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8?
- б) различным натуральным числам?

*А. Берзиньш*

4\*. Билет лотереи — карточка, на которой имеется 50 пустых подряд расположенных клеток. Каждый участник лотереи во все клетки билета записывает числа от 1 до 50 без повторений. Организаторы лотереи по таким же правилам заполняют свою карточку-эталон. Выигравшим считается билет, у которого хотя бы в одной клетке записано такое же число, какое записано в соответствующей клетке карточки-эталона. Какое наименьшее количество билетов надо заполнить участнику лотереи, чтобы иметь выигрышный билет независимо от того, как заполнена карточка-эталон?

*А. Берзиньш*

10 класс

1. Докажите, что для неотрицательных чисел  $a, b, c$  справедливо неравенство

$$\frac{(a+b+c)^2}{3} \geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ca} + c\sqrt{ab}.$$

*Д. Терешин*

2. Существуют ли треугольники, у которых длины

- а) всех трех медиан,
- б) двух медиан

в целое число раз меньше длин сторон, к которым эти медианы проведены?

*Н. Агаханов*

3. На доске написаны натуральные числа  $1, 2, 3, \dots, n$ , где  $n \geq 3$ . За один ход разрешается заменить любые два числа  $p$  и  $q$  на числа  $p+q$  и  $|p-q|$ . После нескольких ходов оказалось, что все написанные на доске числа равны  $k$ . Каковы возможные значения  $k$ ?

*Б. Меркулов*

4. Фигура на рисунке разрезана по сторонам клеток на несколько многоугольников, ни один из которых не содержит квадрата размером  $2 \times 2$  клетки. Каково наименьшее возможное число таких многоугольников?

*А. Анджаке*

11 класс

1. По заданному натуральному числу  $a_0$  строят числа  $a_n$  последовательно при  $n=1, 2, \dots$  по следующему правилу: если последняя цифра числа  $a_{n-1}$  не превосходит 5, то она отбрасывается, и получается число  $a_n$  (возможно, в результате ничего не останется — тогда построение заканчивается), в противном случае —  $a_n = 9a_{n-1}$ . Может ли последовательность  $(a_n)$  оказаться бесконечной?

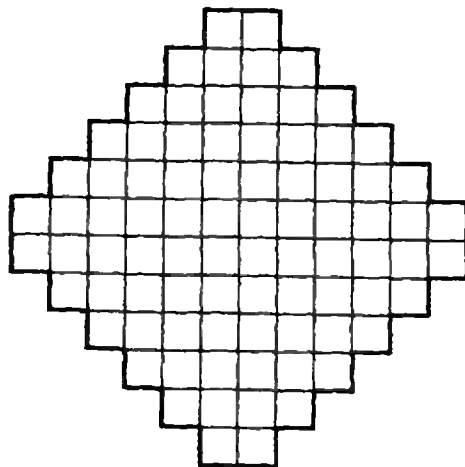
*А. Азамов, С. Комягин*

2\*. Числа  $\alpha$  и  $\beta$  удовлетворяют равенствам

$$\begin{aligned}\alpha^3 - 3\alpha^2 + 5\alpha &= 1, \\ \beta^3 - 3\beta^2 + 5\beta &= 5.\end{aligned}$$

Найдите  $\alpha + \beta$ .

*Б. Кукушкин*



3. На сфере выбраны точки  $A, B, C, D$  и  $E$  так, что отрезки  $AB$  и  $CD$  пересекаются в точке  $F$ , а точки  $A, C$  и  $F$  равноудалены от точки  $E$ . Докажите, что прямые  $BD$  и  $EF$  перпендикулярны.

*Б. Чижик, Н. Сергеев*

4. Существует ли на плоскости

а) набор из четырех попарно неколлинеарных векторов, в котором сумма любых двух векторов перпендикулярна сумме двух других;

б) набор из 91 ненулевого вектора, в котором сумма любых 19 векторов перпендикулярна сумме остальных?

*Д. Фокин*

*Второй день*

9 класс

5. а) Найдите два натуральных числа  $x$  и  $y$  так, чтобы  $x^2 + x$  и  $x^2 + y$  были квадратами различных натуральных чисел.

б) Можно ли найти такие  $x$  и  $y$  в пределах от 988 до 1991?

*А. Анджанс*

6. На сторонах  $AB, BC, CD, DA$  прямоугольника  $ABCD$  соответственно взяты точки  $K, L, M, N$ , отличные от вершин. Известно, что  $KL \parallel MN$  и  $KM \perp NL$ . Докажите, что точка пересечения отрезков  $KM$  и  $LN$  лежит на диагонали  $BD$  прямоугольника.

*Д. Терешин*

7\*. Следователь придумал план допроса свидетеля, гарантирующий раскрытие преступления. Он собирается задавать вопросы, на которые по существу возможны только ответы «да» или «нет» (то, какой вопрос будет задан, может зависеть от ответов на предыдущие вопросы).

Следователь считает, что все ответы будут верными; он подсчитал, что в любом варианте ответов придется задать не более 91 вопроса.

Покажите, что следователь может составить план с не более чем 105 вопросами, гарантирующий раскрытие преступления и в случае, если на один вопрос будет дан неверный ответ.

*А. Анджанс, И. Соловьев, В. Слитинский*

8. Дан квадрат размером  $5 \times 5$  клеток. В одной клетке записан знак «—», в остальных — знак «+». За один ход разрешается менять знаки на противоположные одновременно во всех клетках любого квадрата с границами по линиям сетки, состоящего более чем из одной клетки. В каких клетках может быть расположен минус, чтобы за несколько ходов все знаки могли стать плюсами одновременно?

*А. Грикцаявичюс*

10 класс

5. Точка  $D$  — центр окружности, описанной около остроугольного треугольника  $ABC$ . Окружность, проходящая через точки  $A, B$  и  $D$ , пересекает стороны  $AC$  и  $BC$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно. Докажите, что окружности, описанные около треугольников  $ABD$  и  $MNC$ , равны.

*Б. Чижик*

6\*. Из многоугольника можно получить новый многоугольник с помощью следующей операции: разрезать его по отрезку на 2 части, одну из частей перевернуть и приставить к другой части по линии разреза, если при этом части не будут иметь общих точек, кроме точек разреза. Можно ли с помощью нескольких таких операций из квадрата получить треугольник?

*И. Воронович*

7. Назовем минором  $k \times l$  доски  $n \times n$  пересечение некоторых  $k$  горизонталей с  $l$  вертикалями и его полупериметром — число  $k + l$ . Несколько миноров, каждый полупериметром не меньше  $n$ , вместе покрывают всю главную диагональ доски  $n \times n$ . Докажите, что они покрывают не менее половины клеток доски.

*Д. Флаасс*

8. Пусть  $a_1, \dots, a_{100}, b_1, \dots, b_{100}$  — различные действительные числа. Таблица  $100 \times 100$  заполнена числами по следующему правилу: в клетке на пересечении  $i$ -ой строки и  $j$ -го столбца записано число  $a_i + b_j$ . Известно, что произведение чисел в любом столбце равно 1. Докажите, что произведение чисел в любой строке равно  $-1$ .

*Д. Фокин*

11 класс

5. На сторонах  $AB$  и  $AD$  квадрата  $ABCD$  взяты точки  $K$  и  $N$  соответственно так, что

$$AK \cdot AN = 2BK \cdot DN.$$

Отрезки  $CK$  и  $CN$  пересекают диагональ  $BD$  в точках  $L$  и  $M$ . Докажите, что точки  $K, L, M, N$  и  $A$  лежат на одной окружности.

*Д. Терешин*

6. На Марсе 100 государств, враждующих между собой. Для поддержания мира решено образовать несколько военных блоков так, чтобы в каждом блоке было не более 50 государств и любые два государства состояли вместе хотя бы в одном блоке.

а) Каким наименьшим числом блоков можно обойтись?

б) Тот же вопрос при дополнительном требовании, чтобы в любые два блока входило в общей сложности не более 80 государств.

*Д. Флаасс*

7\*. Даны  $2n$  различных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ . Таблица  $n \times n$  заполнена по следующему правилу: в клетке, расположенной на пересечении  $i$ -ой строки и  $j$ -го столбца, записано число  $a_i + b_j$ . Докажите, что если во всех столбцах произведения чисел одинаковы, то во всех строках — тоже.

*Д. Фокин*

8. Какое наибольшее значение может принимать выражение

$$|y_1 - y_2| + \dots + |y_{1990} - y_{1991}|,$$

если  $y_k = \frac{x_1 + \dots + x_k}{k}$  при  $k = 1, \dots, 1991$ , а числа  $x_1, \dots, x_{1991}$  удовлетворяют условию

$$|x_1 - x_2| + \dots + |x_{1990} - x_{1991}| = 1991?$$

*А. Качуровский*

# XXV Всесоюзная олимпиада по физике

А. ЗИЛЬБЕРМАН

Заключительный этап Всесоюзной физической олимпиады 1991 года прошел с 13 по 23 апреля в городе Ташкенте.

На теоретическом туре, как обычно, девятиклассникам были предложены четыре задачи на четыре часа, а остальным — пять задач на пять часов. Вот условия этих задач (часть из них опубликована в «Задачнике «Кванта»).

## Теоретический тур

### 9 класс

1. У левого края тележки длиной  $L=0,2$  м и массой  $M=1$  кг лежит кубик массой  $m=0,3$  кг (рис. 1). Кубику толчком придают горизонтальную скорость  $v_0=1$  м/с вправо. Считая, что



Рис. 1.

тележка в начальный момент неподвижна, определите, на каком расстоянии от левого края тележки будет находиться кубик после того, как прекратится его проскальзывание относительно тележки. Коэффициент трения кубика о дно тележки  $\mu=0,1$ . Удары кубика о стенки считать абсолютно упругими. Тележка едет по столу без трения.

2. В кастрюлю наливают  $M=0,3$  кг воды и опускают туда термометр и кипятильник, мощность которого можно менять. Оказалось, что при мощности  $P_1=50$  Вт вода нагревается не выше  $t_1=+50$  °С, при мощности  $P_2=100$  Вт — не выше  $t_2=+65$  °С. За какое время эта порция воды нагреется от комнатной тем-

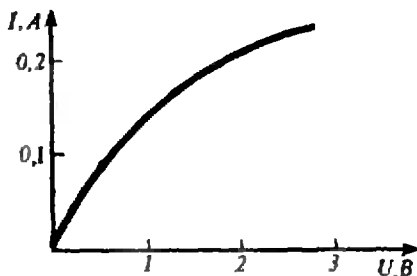


Рис. 2.

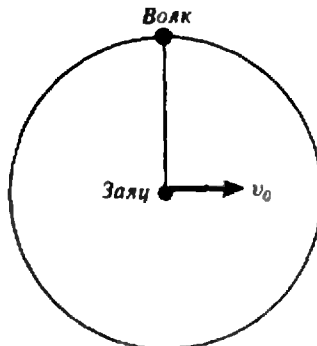


Рис. 3.

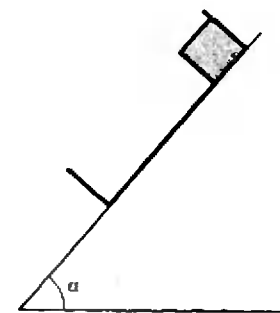


Рис. 4.

пературы  $t_0=+20$  °С до  $t_2=+70$  °С при мощности нагревателя  $P_3=200$  Вт? Оцените предельную температуру при этой мощности. Удельная теплоемкость воды  $c=4200$  Дж/(кг·град).

3. Лампочку для карманного фонаря подключают к источнику напряжения длинными проводами. При длине проводов  $l_1=10$  м ток через лампочку оказался равным  $I_1=0,17$  А, при  $l_2=20$  м —  $I_2=0,13$  А. Каким будет ток через лампочку при длине проводов  $l_3=40$  м? Каким станет этот ток, если лампочку подключить прямо к источнику? Внутреннее сопротивление источника пренебрежимо мало. Зависимость тока через лампочку от ее напряжения приведена на рисунке 2.

4. На горизонтальной поверхности льда нарисована окружность радиусом  $R=10$  м. В центре окружности находится заяц, а волк, как Вы уже догадались, — на окружности (рис. 3). Заяц двигается по прямой с постоянной скоростью  $v_0=2$  м/с. Волк должен двигаться по окружности так, чтобы расстояние между ним и зайцем все время оставалось равным начальному. До какой точки окружности волк сможет добраться, не нарушая правил игры? Коэффициент трения на льду  $\mu=0,05$ . Волк движется строго по окружности, не подпрыгивая.

### 10 класс

1. См. задачу 4 для 9 класса.

2. На шероховатой наклонной плоскости с коэффициентом трения  $\mu=0,8$ , образующей угол  $\alpha=30^\circ$  с горизонтом, лежит коробка длиной  $L=0,2$  м (рис. 4). У верхнего ее края приклеен груз, масса которого равна массе коробки. Внутри коробки трения нет. В некоторый момент груз отклеивается и начинает скользить вниз. На какое расстояние сдвинется коробка? Считайте удары груза о стенки коробки абсолютно упругими.

3. В сосуде под поршнем находится некоторое количество жидкого азота и его паров при температуре  $T_1=78$  К — точка 1 на  $p, V$ -диаграмме на рисунке 5. Поршень медленно отодвигают, увеличивая объем сосуда при постоянной температуре — участок 1—2—3 на диаграмме. В точке 3 давление в сосуде становится равным  $p_1=686$  мм рт. ст. Поршень закрепляют, и сосуд охлаждают до температуры  $T_2=76$  К, давление при этом уменьшается

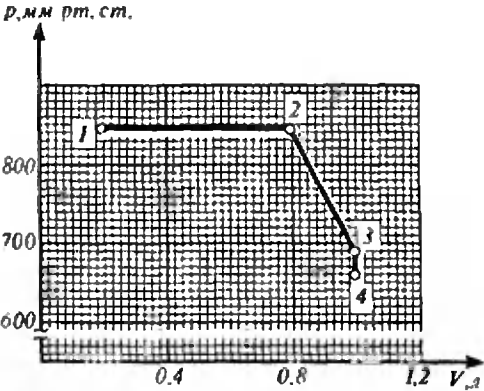


Рис. 5.

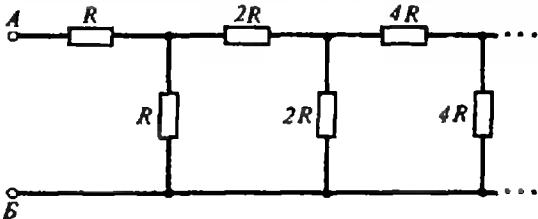


Рис. 6.

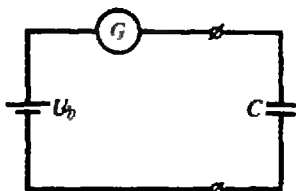


Рис. 7.

до  $p_2=657$  мм рт. ст. — точка 4 на диаграмме. Каким будет давление в сосуде, если при этой температуре медленно передвинуть поршень в начальное положение? Какая масса жидкости первоначально была в сосуде? Пары азота считайте идеальным газом. Молярная масса азота  $M=28$  г/моль, плотность ртути  $\rho=13,6$  г/см<sup>3</sup>.

4. Длинная цепочка из резисторов содержит очень большое число звеньев (рис. 6). Сопротивления резисторов в первом звене  $R$  и  $R$ , во втором —  $2R$  и  $2R$ , в третьем —  $4R$  и  $4R$

и так далее — в каждом следующем звене в 2 раза больше, чем в предыдущем. Чему равно сопротивление всей цепочки, измеренное между точками А и В?

5. В схеме на рисунке 7 напряжение батареи  $U_0=10$  В, емкость конденсатора  $C=1$  мкФ, сопротивление гальванометра  $R=1$  кОм. Десять раз в секунду конденсатор отключают от цепи и сразу же подключают обратно, поменяв местами его выводы. Какой ток показывает гальванометр? Во сколько раз изменится ток при увеличении емкости конденсатора до  $C'=1000$  мкФ? При данной частоте переключений стрелка гальванометра практически не дрожит.

— 11 класс

1. На рисунке 8 приведена фотография двух плоскопараллельных пластинок, составляющих между собой некоторый угол  $\alpha$  и частично погруженных в воду. Горизонтальный размер пластинок равен 12 см. По форме границы раздела между жидкостью и воздухом определите угол  $\alpha$ . Смачивание считайте полным.

2. КПД тепловой машины в цикле 1—2—3—1, состоящем из изотермы 1—2, изохоры 2—3 и адиабаты 3—1, равен  $\eta_1$  (рис. 9). В цикле 1—3—4—1, состоящем из адиабаты 1—3, изотермы 3—4 и изохоры 4—1, КПД равен  $\eta_2$ . Чему равен КПД тепловой машины, работающей по циклу 1—2—3—4—1? Рабочим веществом является идеальный одноатомный газ.

3. Известно, что при внесении незаряженной проводящей сферы в однородное электрическое поле напряженностью  $E_0$ , напряженность поля вблизи точки А оказывается равной  $3E_0$ , а напряженность поля вблизи точки В становится равной нулю (рис. 10). Определите напряженность поля воле точки В. Найдите полный заряд, индуцированный на полусфере БАВ. Радиус сферы  $R$ .

4. Известны опыты, в которых диски, сделанные из немагнитных материалов, падают в неоднородном магнитном поле между полюсами электромагнита (рис. 11) практически без ускорения. В одном из опытов были исследованы четыре диска одинаковых размеров — из серебра, платины, цинка и неизвестного металла. Диск из серебра падал в зазоре электромагнита с некоторой постоянной скоростью  $v$  при токе в обмотке  $I_1=0,41$  А. Диск из платины падал с той же скоростью при токе в об-



Рис. 8.

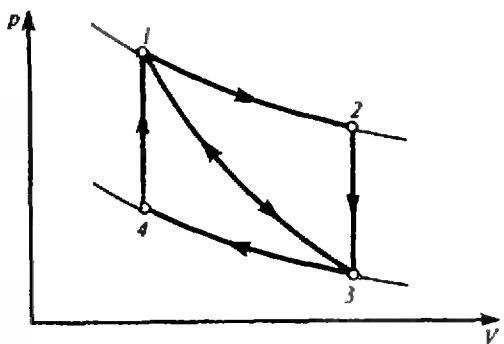


Рис. 9.

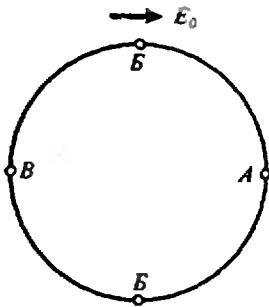


Рис. 10.

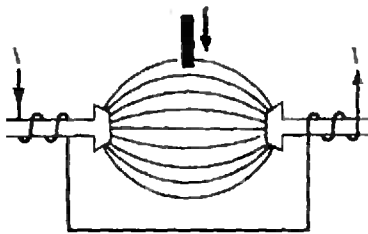


Рис. 11.

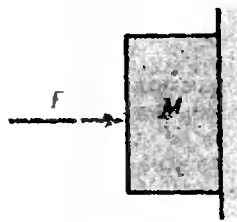


Рис. 12.

мотие  $I_2=1,39$  А. При каком токе из цинка будет падать с той же скоростью? Из какого материала сделан четвертый диск, если он падал с той же скоростью при токе  $I_3=0,29$  А? Считайте, что в данном диапазоне токов поле в зазоре электромагнита пропорционально величине тока. Необходимые данные о материалах возьмите из таблиц.

5. На прислоненное к стенке тело массой  $M$  действует перпендикулярно стенке гармоническая сила  $F=F_0 \cos \omega t$  (рис. 12). Между телом и стенкой помещают невесомую пружину. Какой должна быть ее жесткость, чтобы величина силы, действующей на стенку, отличалась от  $F_0$  в 3 раза?

К сожалению, в третьей задаче для 10 класса была допущена досадная ошибка в числовых данных (здесь она исправлена), что основательно испортило вторую часть задачи. Первым эту ошибку заметил — и доказал, что это ошибка, — руководитель команды из Литвы, однако было уже поздно. Несколько участников тоже заметили несоответствие числовых данных и сделали верные выводы — они и получили за эту задачу максимальный балл.

В целом уровень трудности задач теоретического тура был примерно таким же, как и в прошлые годы. Ни одна из задач не осталась нерешенной.

Задачи экспериментального тура готовили, по установившейся традиции, козява олимпиады — ученые вузов Ташкента, учителя школ. Им пришлось преодолеть массу трудностей (каждый, кто пытался в апреле купить, например, батарейку, хорошо понимает, о чем идет речь), однако в конце концов все устроилось. Опишем коротко задачи экспериментального тура.

В девятом классе первая задача была по оптике. Нужно было определить коэффициент преломления неизвестной жидкости (раствор соли в воде, чуть подкрашенный, но участники этого не знали), используя лампочку на подставке, батарейку, тонкостенный цилиндрический ста-

канчик из прозрачного стекла, черную бумагу, резинку для крепления, линейку и миллиметровку. Авторы задачи предполагали красивое решение — обмотав стаканчик черной бумаги и оставив тонкую вертикальную щель, осветить ее лампочкой и наблюдать сверху. При этом хорошо видны два луча — один в воздухе, он не преломляется, а другой в воде. Дальше — немного геометрии и тригонометрии, и ответ готов. Участники придумали множество способов решения задачи, среди них были и весьма красивые — например, использовать стаканчик с водой как цилиндрическую линзу и расположить эту линзу, источник и экран так, чтобы линза была посередине, при этом геометрия получается совсем простой.

Вторая задача была про трение — нужно было измерить коэффициент трения небольшого куска фанеры о горизонтальную поверхность (альбом с бумажной обложкой). Еще давались две деревянные линейки. Была довольно прозрачная подсказка: на куске фанеры сверлом сделали лунку, куда удобно было упереть угол линейки и толкать фанерку, наклоняя линейку под разными углами. Можно было довольно легко найти такой угол, при котором фанерка уже не скользила (заклинивание), и измерить его с помощью второй линейки. Однако так почти никто не сделал, хотя способов решения было предложено великое множество, в том числе и довольно интересных.

Первая задача для десятого класса была вполне стандартной — нужно было измерить плотность сыпучего материала, а именно песка (точнее, как было специально отмечено в условии, — плотность материала, из которого состоят песчинки). Оборудование: бутылка с широким горлышком, пробирка, вода, нитка, миллиметровка. Простота этой задачи оказалась обманчивой — не так легко найти оптимальную методику, которая позволит исключить ошибки, связанные с толщиной стенок пробирки (ее трудно измерить

сколь-нибудь точно, лучше исключить ее из ответа, придумав хороший способ измерений), с поверхностными явлениями и т. п.

Вторая задача — «черный ящик» с двумя выводами, содержащий источник. Нужно было найти ЭДС и внутреннее сопротивление источника при помощи вольтметра (его сопротивление было вполне сравнимым с внутренним сопротивлением источника) и потенциометра сопротивлением 1 кОм. Нужно было придумать, как из этого потенциометра сделать два (а лучше — три) известных резистора. Один из способов — установить движок потенциометра примерно посередине и при помощи вольтметра подобрать положение поточнее, включая «половинки» поочередно. Теперь у нас есть резистор сопротивлением 500 Ом и еще один — сопротивлением 250 Ом, если соединить «половинки» параллельно. Дальше уже совсем просто — нужно составить несколько схем и рассчитать неизвестные ЭДС и внутреннее сопротивление источника (можно было взять схем больше, чем нужно для расчета, и проверить, нет ли в «черном ящике», скажем, диода). Впрочем, арифметика получалась не такая уж и простая — некоторые участники все сделали верно, но увязли в вычислениях, так и не добравшись до ответа —

4,5 В и 1 кОм (плоская батарейка, резистор).

В первой задаче для одиннадцатого класса — оптической — было необходимо измерить коэффициент преломления глицерина и неизвестного прозрачного вещества (кусочки плавленого кварца неправильной формы). Оборудование: прозрачная цилиндрическая кювета с параллельными торцами, лампочка на подставке, батарейка, вода, глицерин, миллиметровка. Идея понятна — «утопить» кусочки в такой смеси воды и глицерина, чтобы они были не видны. При этом можно считать, что оптические свойства смеси такие же, как и у кусочков, а остальное — понятно.

Во второй задаче нужно было найти температуру нити лампочки накаливания при заданном токе. Был дан температурный коэффициент вольфрама, и нужно было измерить сопротивления при комнатной температуре и в рабочей точке. Трудность состояла в том, что даже небольшой ток заметно нагревает нить накала, поэтому нужно было провести экстраполяцию характеристики нити в область малых токов.

По результатам Всесоюзной олимпиады этого года сформирована — предварительно — команда нашей страны для участия в Международной физической олимпиаде



*Участники олимпиады, получившие дипломы I степени.*



1992 года. В нее вошли 14 победителей Всесоюзной олимпиады по десятым классам и два девятиклассника — А. Ольховец (сильно обогнавший остальных девятиклассников) и О. Шпырко (выступавший среди десятиклассников).

Как всегда, среди специальных призов был и приз имени академика И. К. Киридина. Его получил Анатолий Ольховец за лучшее решение задач экспериментального тура.

После обсуждения с руководителями команд принято решение опубликовать программу по физике для участников заключительного этапа Всесоюзной физи-

ческой олимпиады (возможно, это будет сделано и на страницах «Кванта»). Она будет несколько шире обычной школьной программы (из которой постепенно исключаются все новые и новые разделы), однако не будет выходить за рамки факультатива по физике.

В настоящий момент еще нельзя с уверенностью назвать место проведения следующей Всесоюзной олимпиады по физике, но мы очень надеемся, что она состоится.

Желаем успехов всем участникам олимпиады.

## Призеры XXV Всесоюзной олимпиады школьников по математике и физике

### Математика

#### Дипломы I степени

по 9 классам получили

Бондаренко М.— Санкт-Петербург, с. ш. 239  
Галванс А.— Олайне, с. ш. 1,  
Звожик Д.— Москва, с. ш. 43,  
Каукис В.— Рига, гимназия 1,  
Линде Г.— Рига, гимназия 1,  
Плотницкис Ю.— Рига, гимназия 1,  
Федоров Р.— Москва, с. ш. 57;

по 10 классам —

Амбайнис А.— Даугавпилс, с. ш. 12,  
Аркин Д.— Харьков, с. ш. 132,  
Бурков А.— Киров, с. ш. 35,  
Галванс А.— Олайне, с. ш. 1,  
Кожевников П.— Калуга, с. ш. 24,  
Ногин А.— Москва, с. ш. 57,  
Некрасевич В.— Киевская обл., Ковшеватская с. ш.;

по 11 классам —

Жуховицкий В.— Санкт-Петербург, с. ш. 239,  
Коган М.— Санкт-Петербург, с. ш. 566,  
Малинникова Е.— Санкт-Петербург, с. ш. 239,  
Перлин А.— Санкт-Петербург, с. ш. 239,  
Темкин М.— Москва, с. ш. 57.

#### Дипломы II степени

по 9 классам получили

Богданов И.— Пермь, с. ш. 17,  
Бринюк В.— Донецк, с. ш. 35,  
Дудко Д.— Киев, с. ш. 61,  
Кухта А.— Комсомольск-на-Амуре, с. ш. 9,  
Потапова Л.— Рига, гимназия 1,  
Розенблюм Е.— Санкт-Петербург, с. ш. 239,  
Саприкин С.— Одесса, с. ш. 36,  
Сосыка Е.— Краснодар, с. ш. 5,



Хазанов А.— Санкт-Петербург, с. ш. 239,  
Черухин Д.— Керчь, с. ш. 1,  
Ческидов А.— Усть-Каменогорск, с. ш. 25;

по 10 классам —

Аншмитс У.— Рига, гимназия 1,  
Бородин А.— Донецк, с. ш. 17,  
Изместьев И.— Кировская обл., Сунская с. ш.,  
Исмаилов Р.— Санкт-Петербург, с. ш. 239,  
Климов С.— Ижевск, с. ш. 30,  
Корниенко А.— Днепрпетровск, с. ш. 36,  
Маяютин А.— Санкт-Петербург, с. ш. 45,  
Норвеллис Я.— Рига, гимназия 1,  
Никулин М.— Обнинск Калужской обл., гимназия 2,  
Петросян А.— Ереван, ФМШ,  
Рабинович М.— Москва, с. ш. 57,  
Чиликов А.— Киров, с. ш. 35;

по 11 классам —

Андерсонс Г.— Рига, гимназия 1,  
Балашов О.— Санкт-Петербург, с. ш. 45,  
Волоченко К.— Донецк, с. ш. 17,  
Гриншпон М.— Томск, с. ш. 32,  
Жарков С.— Киев, с. ш. 145,  
Мучник Р.— Винница, с. ш. 17,  
Насыров А.— Москва, СУНЦ МГУ.

#### Дипломы III степени

по 9 классам получили

Беленов Р.— Нижний Новгород, с. ш. 40,  
Брюхов Е.— Челябинск, с. ш. 31,  
Гуреев А.— Новгород, с. ш. 1,  
Казанцева В.— Ижевск, с. ш. 30,  
Костин В.— Саратов, физико-технический лицей 1,  
Лауд П.— Таллин, с. ш. 9,  
Порошенко Е.— Алма-Ата, РСФМШИ,

Смирнов А.— Вологодская обл., Березников-  
ская с. ш.,  
Степанов А.— Тверь, с. ш. 17,  
Топчий А.— Омск, с. ш. 64;

по 10 классам —

Елсуфьев А.— Санкт-Петербург, с. ш. 30,  
Зайцев С.— Тула, с. ш. 78,  
Крустс А.— Юрмала, с. ш. 1,  
Вузьмич С.— Минск, МССШ при ВГУ,  
Майлыбаев А.— Москва, СУНЦ МГУ,  
Певцова Ю.— Санкт-Петербург, с. ш. 239,  
Рымов А.— Алма-Ата, РСФМШИ,  
Сибиченков А.— Смоленск, гимназия,  
Теплинский А.— Каменец-Подольский Хмель-  
ницкой обл., с. ш. 7,  
Фельдман К.— п. Чернооголовка Московской  
обл., с. ш. 82,  
Хасин М.— Донецк, с. ш. 17,  
Хвонкин К.— Минск, МССШ при ВГУ,  
Чудинов К.— Пермь, с. ш. 17;

по 11 классам —

Барсуков С.— Краснодар, с. ш. 4,  
Бродский Н.— Челябинск, с. ш. 31,  
Вигулис Н.— Валмиера, с. ш. 4,  
Дацук А.— Санкт-Петербург, с. ш. 30,  
Днестранский А.— Рязань, с. ш. 2,  
Карманый Р.— Унгены, с. ш. 4,  
Каспаравичюте Р.— Вильнюс, с. ш. 7,  
Козачко А.— Винница, с. ш. 17,  
Копылов А.— п. Чернооголовка Московской обл.,  
с. ш. 82,  
Кротов Д.— Новосибирск, с. ш. 25,  
Кузьма Ю.— п. Протва Калужской обл., с. ш. 1,  
Львов А.— Москва, с. ш. 43,  
Мишачев К.— Липецк, с. ш. 14,  
Наумович А.— Минск, с. ш. 19,  
Полонский Ю.— Витебск, с. ш. 31,  
Рябичева О.— Киров, с. ш. 8,  
Солодов А.— Воронеж, колледж 1,  
Страусс У.— Рига, гимназия 1,  
Цыганон Е.— Белорезк, компьютерная ш.,  
Шамсугдинов М.— Уфа, с. ш. 114,  
Янсонс М.— Сигулда, с. ш. 1.

## Физика

### Дипломы I степени

по 9 классам получили

Красновид А.— Гродно, с. ш. 19,  
Ольховец А.— Киев, с. ш. 206,  
Чигирев Д.— Санкт-Петербург, с. ш. 566;

по 10 классам —

Арбатский Д.— Санкт-Петербург, с. ш. 239.  
Базаров И.— Владивосток, с. ш. 23,  
Горгадзе В.— Нальчик, с. ш. 19,  
Гуллеев Н.— Нижний Новгород, с. ш. 82,  
Могрунич А.— Ужгород, с. ш. 1,  
Ращюс А.— Каунас, с. ш. Саулес,  
Шутенко Т.— Мариуполь, с. ш. 41;

по 11 классам —

Башинский С.— Стерлитамак, с. ш. 27,  
Добровольский С.— Днепропетровск, с. ш. 111.

### Дипломы II степени

по 9 классам получили

Малюгин В.— п. Ува (Удмуртия), с. ш. 1,  
Рыбачук В.— Винница, с. ш. 26,  
Цейтлин В.— Москва, с. ш. 57,  
Якупов Р.— Кузнецовск, с. ш. 1;

по 10 классам —

Ганнох А.— Киев, с. ш. 61,  
Ивченко Н.— Киев, с. ш. 145,  
Лобанов А.— Алма-Ата, РСФМШИ,  
Панков С.— Тула, с. ш. 78,  
Фролов А.— Москва, с. ш. 303,  
Чистый А.— Брест, с. ш. 1,  
Шпырко О.— Киев, с. ш. 206, 9 кл;

по 11 классам —

Березняков А.— Саратов, лицей 1,  
Вавилов М.— Екатеринбург, с. ш. 2,  
Дементьев А.— Чебоксары, с. ш. 45,  
Иванов М. Г.— Тула, с. ш. 73,  
Ковтуненко Б.— Запорожье, с. ш. 28,  
Литвак А.— Нижний Новгород, с. ш. 40,  
Ляпин А.— Нальчик, с. ш. 9,  
Пузынь П.— Гродно, с. ш. 19,  
Тайманов С.— Раменское, с. ш. 4,  
Шаракин С.— Москва, СУНЦ МГУ,  
Ширяев А.— Санкт-Петербург, с. ш. 239.

### Дипломы III степени

по 9 классам получили

Бабурин Д.— Красноярск, с. ш. 41,  
Беляев Л.— Петропавловск, с. ш. 1,  
Бережнов А.— Казань, с. ш. 131,  
Гвоздев П.— Котельнич, с. ш. 3,  
Головатый А.— Ступино, с. ш. 9,  
Квицинский А.— Киев, ФМШ при КГУ,  
Кокорич М.— п. Агинское Читинской обл.,  
с. ш. 2,

Малинова Е.— Санкт-Петербург, ФМШ при  
ЛГУ,

Сауничев К.— Бийск, с. ш. 18,  
Седельников А.— Усть-Каменогорск, с. ш. 17,  
Халапян С.— ст. Осколок, с. ш. 16;

по 10 классам —

Белиловский О.— Алма-Ата, РСФМШИ,  
Булаевко С.— Киев, ФМШ при КГУ,  
Иютин Б.— Тула, с. ш. 73,  
Козлов К.— Глазов, с. ш. 14,  
Кротов Д.— Тверь, с. ш. 17,  
Маравин Ю.— Евпатория, с. ш. 6,  
Овсицер Б.— Северодвинск, с. ш. 17,  
Самойлиди С.— Новосибирск, СУНЦ НГУ;

по 11 классам —

Борковский А.— Богородчаны, с. ш. 1,  
Денисов И.— Могилев, лицей,  
Ненашев А.— Новосибирск, СУНЦ НГУ,  
Полищук И.— Москва, с. ш. 5,  
Реачев М.— Винница, гимназия,  
Сапаев У.— Шават, с. ш. 120,  
Субботин Д.— Москва, с. ш. 57,  
Таможюнас В.— Вильнюс, с. ш. 45,  
Третьяков Ю.— Алма-Ата, РСФМШИ,  
Усольцев К.— Владивосток, с. ш. 23,  
Харисов А.— Уфа, с. ш. 74,  
Чарушин А.— Новосибирск, СУНЦ НГУ.

## IV Всесоюзная олимпиада школьников по информатике

Кандидат технических наук  
В. КИРЮХИН

В этом году заключительный этап IV Всесоюзной олимпиады школьников по информатике проходил с 17 по 24 апреля в Бишкеке — столице республики Кыргызстан. На сей раз в олимпиаде принимали участие 87 школьников из 11 союзных республик, а также городов Москвы, Санкт-Петербурга и Бишкека (как города-организатора олимпиады). В общей сложности 16 команд представляли республики и различные регионы страны. Как всегда, самой многочисленной была команда РСФСР — 26 человек. Минимально возможным составом (3 участника) были представлены команды Казахстана, Кыргызстана, Латвии, Молдовы и Туркмении.

Кыргызстан встретил участников олимпиады своей неповторимой красотой. Все ребята сразу почувствовали, что они являются здесь желанными гостями. И даже солнце приветливо улыбалось участникам, желая успехов в этом трудном соревновании.

Красочным было торжественное открытие, которое состоялось в зале филармонии. Организаторы сделали все, чтобы передать собравшимся присущий республике национальный колорит и создать хорошее настроение на весь период проведения олимпиады.

Как и прежде, олимпиада проводилась в два тура, причем оба тура были компьютерные. Половина участников выбрала для соревнований персональные компьютеры IBM PC, а другая половина — «Ямаху».

Жюри Всесоюзной олимпиады возглавлял академик АН республики Кыргызстан В. П. Живоглазов. В состав жюри с правом решающего голоса входили представители всех участвующих республик, а также городов Москвы и Санкт-Петербурга. Пакет задач к олимпиаде был подготовлен научным комитетом во главе с членом-корреспондентом АН СССР Ф. Л. Черноусько и перед каждым туром жюри олимпиады отбирало из этого пакета одну задачу. Задачи были многоуровневые, что позволило проявить себя как очень сильным участникам, так и менее

подготовленным. Следует отметить проблемную окраску предлагавшихся задач — она потребовала от ребят продемонстрировать не только умение составить алгоритм и работоспособную программу, но и формализовать поставленную проблему. Приведем условия задач.

### Задача I тура

(авторы А. Грудев, Ф. Черноусько)

На координатной плоскости задан робот-манипулятор, состоящий из двух последовательно соединенных звеньев, длины которых  $L_1$  и  $L_2$ . Первое звено шарнирно закреплено в начале координат, второе шарнирно соединено с первым. В конце второго звена установлено сверло. Робот управляется путем поворота звеньев в первом и во втором шарнирах с угловыми скоростями, по абсолютной величине не превышающими  $\omega_1$  и  $\omega_2$  (рад/с) соответственно. Второе звено может вращаться относительно первого беспрепятственно.

Робот предназначен для сверления отверстий. Координаты точек сверления:  $(x_1; y_1), (x_2; y_2), \dots, (x_N; y_N)$ .

В начальный момент первое звено направлено вдоль положительной полуоси  $OX$ , а второе звено образует угол  $A$ , отсчитываемый от оси  $OX$  против часовой стрелки. Время операции сверления отверстия фиксировано и равно  $P$ .

Требуется составить программу, которая:

а) выдает какую-либо последовательность номеров точек сверления и требуемое для этого время;

б) выдает последовательность сверления заданных точек за наименьшее, по возможности, время работы робота и само это время;

в) для заданного интервала времени  $(0, T)$  выбирает максимальное количество просверленных отверстий и выдает их последовательность.

### Примечания

- 1) Все исходные данные целочисленные.
- 2) Программа должна осуществлять ввод исходных данных либо из входного файла ( $A: ROBOT.DAT$ ), либо с клавиатуры в виде последовательности:  $L_1, L_2, \omega_1, \omega_2, A, T, P, N, x_1, y_1, \dots, x_N, y_N$ .

### Задача II тура

(автор И. Волков)

Задается множество различных слов  $A = (a_1, a_2, \dots, a_k), k \leq 10$ . Из слов мно-

жества  $A$  составляется зашифрованный текст — последовательность слов, записанных без разделителей-пробелов. Слова представляют собой непустые последовательности не более восьми заглавных латинских букв и могут встречаться в тексте произвольное количество раз. Необходимо дешифровать текст, т. е. разбить его на слова множества  $A$ . В дешифрованном тексте слова следует разделять пробелами.

Написать программу, которая:

а) определяет, существует ли для заданного множества  $A$  такой текст, который дешифруется не единственным образом;

б) если такой текст существует, то исключает из множества  $A$  минимальное количество слов так, чтобы любой текст дешифровался однозначно, и печатает исключаемые слова (если такой исключаемый набор не единственный, то выводит все варианты);

в) для введенного текста производит его дешифровку, используя первоначально введенное множество  $A$ , и если дешифровка не единственная, то выводит все варианты.

Последовательность операций ввода/вывода:

— ввод множества  $A$ :

“введите k” <K>

“введите a1” <a1>

“введите a2” <a2> . . . . .

“введите ak” <ak>

— вывод сообщения:

“неоднозначно дешифруемый текст существует”

или

“не существует”

— если текст существует, то вывод сообщения:

“выбросить” <список слов>

— ввод текста длиной не более сорока символов в виде:

“текст” <текст>

— вывод результатов дешифровки:

<текст> → <дешифрованный текст>.

### Примеры

1)  $A = (B, C)$  — любой текст дешифруется однозначно.

2)  $A = (B, C, BC)$  — существует текст, который дешифруется двумя способами:

$BVC \rightarrow BVC$

или

$BVC \rightarrow BV C$ .

Жюри олимпиады совместно с комиссией по проверке работ участников оценивало задачу каждого тура исходя из 100 баллов. При оценке результатов учитывалось умение школьников формализо-

вать предложенное задание, умение алгоритмизировать, т. е. разрабатывать наилучший алгоритм и обосновывать его достоверность, умение программировать полученный алгоритм с использованием одной из систем программирования: Бейсик, Турбо-Паскаль, Турбо-Си. Кстати, большинство школьников программировало на Паскале.

Из двух предлагавшихся на олимпиаде задач наиболее сложной оказалась задача первого тура. При ее решении важно было выявить недоступные точки, указать неоднозначность перемещения робота из одной позиции в другую, а также обосновать необходимость полного перебора для получения правильного ответа. Кроме того, эта задача предполагает ряд интересных эвристик, существенно повышающих эффективность алгоритма при определенных сочетаниях исходных данных.

К сожалению, решить эту задачу в полном объеме никто из участников олимпиады не смог. Наилучших результатов здесь добились А. Гузев из Перми (56 баллов), Д. Жуков из Москвы (56 баллов) и С. Герштейн из Екатеринбурга (52 балла). Только 30 % школьников получили за эту задачу 20 баллов и выше — как оказалось, многие участники просто плохо знают математику и физику, что не позволило им даже приступить к разработке алгоритма решения задачи.

Задача второго тура была более доступной для формализации, поэтому и результаты были лучше. Максимальное количество баллов — 72 — получил за эту задачу А. Суханов из Санкт-Петербурга. По 52 балла получили Д. Уваров из Новокузнецка и А. Скворцов из Юбилейного Днепропетровской области.

Конечно, относительно невысокие результаты, полученные участниками при решении задач этой олимпиады, можно отчасти объяснить их сложностью. Однако только этим объяснением ограничиваться не стоит. Во-первых, уровень сложности задач соответствовал международным олимпиадам, и, наверное, было бы неправильно эту планку для нас опускать ниже. Во-вторых, в теоретическом плане многие участники нашли правильную идею решения каждой задачи. Не хватило времени на реализацию. Все это говорит о том, что интеллектуальные способности большинства участников достаточно высокие, однако отсутствие необходимой практики работы с персональными компьютерами не позволило им довести имеющиеся идеи до логического завершения,

т. е. получить работоспособные программы.

Несмотря на все трудности, быстро пролетели дни соревнований, настало время подведения итогов. Как всегда, было много различных призов победителям олимпиады, кроме того, каждый участник получил от организаторов памятный подарок.

В этом году впервые подведение итогов осуществлялось раздельно по двум категориям: 8—10 классы и 11 классы. Лучше всех в общем зачете выступил на этой олимпиаде А. Суханов (122 балла), который получил в награду персональный компьютер «Корвет». За ним идут А. Гусев (90 баллов) и Д. Уваров (89 баллов). Как и на прошлых олимпиадах, в командном зачете впереди оказались школьники из Санкт-Петербурга. Отрадно, что среди призеров оказались и девушки — А. Пратусевич и А. Косов-

ская получили соответственно дипломы второй и третьей степени.

По результатам прошедшей олимпиады жюри рекомендовало включить в состав кандидатов на международную олимпиаду по информатике этого года А. Суханова и Д. Кима. Для подготовки к следующей международной олимпиаде, которая пройдет в 1992 году в Германии, кандидатами в сборную СССР включены все школьники невыпускных классов, получившие дипломы I и II степени. Они будут приглашены для участия в зимних сборах, которые состоятся в следующем году.

В заключение хотелось бы поблагодарить организаторов олимпиады, сделавших все возможное для проведения такого сложного в техническом отношении соревнования, а также пожелать всем участникам еще больших успехов на непростой ниве информатики.

## Призеры IV Всесоюзной олимпиады школьников по информатике

### Дипломы I степени

по 8—10 классам получили

*Гусев А.* — Пермь,  
*Жуков Д.* — Москва,  
*Матлаш П.* — Первомайск Николаевской обл.,  
*Скворцов А.* — Юбилейный Днепропетровской обл.;

по 11 классам —

*Герштейн С.* — Екатеринбург,  
*Ким Д.* — Темиртау,  
*Суханов А.* — Санкт-Петербург,  
*Уваров Д.* — Новокузнецк.

### Дипломы II степени

по 8—10 классам получили

*Белый В.* — Минск,  
*Кузнецов Е.* — Москва,  
*Мириный Э.* — Рига,  
*Мионов И.* — Санкт-Петербург,  
*Шульпин И.* — Калининград;

по 11 классам —

*Законов А.* — Санкт-Петербург,  
*Иванов Д.* — Грозный,  
*Лепихин В.* — Волгоград,  
*Мельников В.* — Лиски Воронежской обл.,  
*Пратусевич А.* — Санкт-Петербург,  
*Свидерский В.* — Могилев,  
*Хаменя В.* — Гродно.

### Дипломы III степени

по 8—10 классам получили

*Вашкевич М.* — Минск,  
*Веревкин П.* — Курск,  
*Кретов М.* — Ашхабад,  
*Оффенбах И.* — Омск;

по 11 классам —

*Алтуев М.* — Нальчик,  
*Дорош В.* — Донецк,  
*Кабак В.* — Сморгонь Гродненской обл.,  
*Косарев Т.* — Москва,  
*Косовская А.* — Санкт-Петербург,  
*Куцев С.* — Бишкек,  
*Маркелов А.* — Самара,  
*Яценко Р.* — Москва.

## Заочная биолого-математическая олимпиада

Всесоюзная заочная многопредметная школа (ВЗМШ) АПН СССР при МГУ им. М. В. Ломоносова и научно-исследовательский сектор Московского института усовершенствования учителей проводят заочную биолого-математическую олимпиаду.

В последнее время математические приемы и модели становятся все более широко используемым средством в самых различных областях биологии. Синтез двух наук оказался не только интересным, но и весьма полезным подходом для описания и изучения биологических процессов (см., например, статью М. Беркинблита и Е. Глаголевой «Математика в живых организмах» в февральском номере «Кванта» за 1990 г.). Поэтому мы предлагаем испытать себя всем, кто интересуется математикой и биологией (возможно, одной из этих наук больше, а другой — чуть-чуть).

В олимпиаде могут принять участие школьники, учащиеся техникумов и ПТУ. Победители будут определяться отдельно по каждому классу (при общем наборе задач).

Как правило, в предлагаемых задачах требуется провести довольно глубокий анализ описанных систем, поэтому не расстраивайтесь, если в решении части из них вам не удастся довести дело до конца. В принципе, победителем олимпиады можно стать, решив хорошо лишь некоторые задачи.

Работа должна быть выполнена на русском языке в тетради. Решение каждой задачи начинайте с нового листа. На обложке тетради ответьте на следующую анкету:

1. Фамилия, имя, отчество.
2. Номер класса, школы (иного учебного заведения).
3. Полный почтовый домашний адрес с индексом.
4. Наиболее интересующие вас области биологии.

Работы высылайте по адресу: 119823, Москва, ГСП, МГУ, ВЗМШ, биолого-математическая олимпиада. Срок отправки работ — не позднее 1 февраля 1992 г.

Победители награждаются призами, а их фамилии и анализ решений задач будут опубликованы в «Кванте».

Желаем успехов!

1. Кольцевая молекула ДНК состоит из 4000 пар нуклеотидов (п. н.). Биохимик обрабатывает ее рестриктазами (ферментами, расщепляющими ДНК в определенных местах) и разделяет фрагменты по их длине методом электрофореза. При обработке рестриктазой А получены полосы, соответствующие фрагментам в 1000 и 3000 п. н., при обработке рестриктазой В — полосы, соответствующие фрагментам в 300, 1700 и 2000 п. н. При обработке ДНК одновременно обеими рестриктазами электрофорез дал 4 полосы, но измерить их положение биохимик не успел, опаздывая в кино, а его коллеги выбросили препарат, решив, что он уже не нужен. Можно ли по имеющимся сведениям определить, какова была длина этих фрагментов?

2. В настоящее время известно около миллиона видов насекомых. Союз Профессиональных любителей насекомых составил описания всех этих видов, состоящие из 40 предложений каждое. Установлено, что на прочтение, осмысление каждого предложения и проверку того, имеется ли указанный в нем признак у данной особи насекомого, требуется примерно 3 минуты. Как должен быть устроен хороший определитель, позволяющий минимизировать среднее время, уходящее на определение неизвестного насекомого? Чему будет равняться это время?

3. На берегу озера стоят (по кругу)  $N$  фазенд. Каждый фазендейро каждый вечер ездит в гости к своему левому и правому соседям, причем за долгие годы у них выработался такой график поездок, что каждый гость застает хозяина дома. Но эта размеренная жизнь была нарушена. Как-то утром к одному из фазендейро зашел путник и заразил хозяина некоей болезнью.

а) Для болезни характерно следующее течение:

0-й день — заражение: человек здоров и незаразен;

1-й день — инкубационный период: человек внешне здоров, но заразен;

2-й и 3-й дни — человек болен и заразен;

4-й день — человек здоров и вновь может заразиться.

Фазендейро сохранили традицию и продолжают ходить в гости и к здоровым, и к больным соседям, если только не болели сами (на 2-й и 3-й дни заболевания). Опишите ход эпидемии, считая, что вероятность заражения при контактах — 100%. Обществен с рабами и домочадцами пренебречь.

б) Условия те же, что и в а), но на третий день болезни человек болен и незаразен. Опишите ход эпидемии.

в) Опишите ход эпидемии, выбрав какие-либо иные варианты течения болезни.

г) Смогут ли в задачах а) — в) один или несколько фазендейро, изменив свое поведение, остановить эпидемию? Если да — то как?

4. Способность чувствительных клеток органов зрения реагировать на свет описывается их спектральной характеристикой: зависимость между длиной волны ( $L$ ) и интенсивностью отклика клетки ( $S$ ) на монохроматическое излучение единичной мощности с этой длиной волны. Отклик клетки на смесь нескольких монохроматических излучений с разными мощностями ( $I_1, I_2, I_3, \dots$ ) является суммой откликов на каждое из них, т. е.  $I_1 S_1 + I_2 S_2 + I_3 S_3 + \dots$  (для излучения с непрерывным спектром клетка интегрирует функцию  $I(L) \cdot S(L)$ , но при решении нашей задачи применять это свойство не понадобится). Обычно клетки имеют колоколообразную спектральную характеристику. Обработывая информацию от разных рецепторов, мозг определяет цвет и яркость объектов.

а) Вам необходимо определить для монохроматического света любой мощности его длину волны. Какое минимальное число разных типов клеток для этого потребуется? Предложите какие-либо спектральные характеристики этих клеток и опишите способ определения длины волны. (На излучения с длинами волн менее 400 нм или более 700 нм вы, как и человеческий глаз, можете не реагировать.)

б) Вам необходимо для смеси двух монохроматических излучений определить их длины волн и мощности. Какое минимальное число разных типов клеток для этого потребуется?

5. Говоруны бывают желтые, синие и зеленые. Признак этот определяется одним геном. (О механизме наследования таких признаков вы можете прочитать в школьном учебнике общей биологии или в любом учебнике генетики.) Доминирование отсутствует — гетерозиготы зеленые (желтый + синий цвета). Спариваются только особи разных цветов, в остальном же пары образуются случайно.

В большой популяции поровну говорунов всех трех цветов. Как будет изменяться доля животных разного цвета, если представители разных поколений друг с другом не спариваются? Опишите также, что будет происходить с популяцией, в которой изначально доли животных желтого, зеленого и синего цвета составляют  $X$ ,  $Y$  и  $Z$ .

Соотношение полов — 1:1. Рассмотрите отдельно два случая:

а) формирование постоянных пар;

б) пары образуются только для оплодотворения, причем партнера находят все самки.

6. У брякозавров выбору самки предшествует турнир, причем каждый самец участвует ровно в одном поединке. Среди самцов бывают «забияки» и «тихони». «Забияка» лезет в драку и сражается до конца. «Тихоня» хорохорится и может без драки напугать такого же «тихоню», а от «забияки» он бежит без борьбы. Пары турнирных боях образуются чисто случайно. Для любого «забияки» вероятность победы в драке с любым другим

«забиякой» —  $1/2$ ; для любого «тихони» вероятность победы в поединке с любым другим «тихоней» —  $1/2$ . Дети у отца «забияки» — тоже «забияки», у отца «тихони» — «тихони».

а) Самец-победитель имеет в среднем 4-х потомков. Находит пару и проигравшие. Самец, капитулировавший без борьбы, имеет 3-х потомков, а вот самец, потрепанный в неудачной для него драке, — лишь одного. Во всем остальном выживаемость и приспособляемость от темперамента не зависят.

Какова будет судьба «забияк» и их потомков, если несколько «забияк» попадут в большую популяцию «тихоней»?

Какова будет судьба «тихоней» и их потомков, если несколько «тихоней» попадут в большую популяцию «забияк»?

Может ли популяция на протяжении многих поколений состоять как из «забияк», так и из «тихоней»? Если нет, то почему, а если да, то каково в ней может быть соотношение этих двух типов?

б) Смешанная популяция брякозавров попала в новую местность, где вероятность дожить до брачного турнира у «забияк» в  $P$  раз выше, чем у «тихоней». Как изменится их соотношение?

в) Каковы будут ответы в задаче, если численности потомков при различных исходах турнира равняются  $X$ ,  $Y$  и  $Z$ ?

Публикацию подготовил С. Глазголев

## Конференция в Обнинске

Уже несколько лет в городе науки Обнинске проходят научные конференции школьников. В последнее время на эти конференции съезжаются гости со всей страны. Так, на VI Обнинскую конференцию учащихся «Юность, наука, культура», которая проходила 2—6 апреля 1991 года, приехали 42 делегации из 34 городов Союза. Были представлены Астрахань, Арзамас, Барнаул, Владикавказ, Горно-Алтайск, Загорск, Днепропетровск, Екатеринбург, Иркутск, Йошкар-Ола, Калининград, Калуга, Кемерово, Киев, Краснодар, Курган, Львов, Минск, Москва, Новокузнецк, Новосибирск, Норильск, Обнинск, Омск, Пермь, Переславль-Залесский, Ростов-на-Дону, Сургут, Удомля, Уфа, Харьков, Чамзенка, Челябинск, Якутск.

Программа конференции была очень насыщена — это встречи с ведущими учеными, творческие бизнес-игры, экскурсии, круглые столы педагогов по обмену опытом работы и т. д. Но самое главное происходило на 15 секциях конференции: математической, программирования, физической, астрономической, химической и других. На секциях школьники вы-

ступали с докладами по итогам своей исследовательской работы.

Тематика докладов была весьма разнообразна и довольно интересна. Например, на математической секции вызвали интерес доклады обнинских учащихся из физико-технической школы при ИАТЭ и лица «Духовное возрождение», выполненные под руководством Р. В. Плыкина, доктора физико-математических наук, профессора ИАТЭ, президента Обнинского НОУ. Это доклады учащихся 10 класса С. Горпинича «О реализации конечноточечных ультраметрических пространств в пространстве Лобачевского», Р. Гетманского «Решение уравнений 3 и 4 степени и задачи В. И. Арнольда», А. Изотова «О равновеликости и равносоставленности» и другие.

Из докладов гостей были отмечены работы С. Бахметьева (Новосибирск, УНЦ — ФМШ НГУ) «Проблема Альберта», Ю. Олиарника (Львов, с. ш. № 2) «Исследование центральной предельной теоремы и проверка закона больших чисел», Д. Кудрявцева (Новокузнецк, с. ш. № 44) «Преобразование координатных систем, связанных с различными кристаллографическими плоскостями кристалла», и т. д.

По сложившейся традиции лучшие работы школьников публикуются в сборниках трудов Обнинского научного общества учащихся, которое совместно с центром научного и технического творчества учащихся «Эврика» г. Обнинска является основным организатором научных конференций.

Следует отметить, что наиболее сильные работы представляют учащиеся из специализированных школ или классов, преподавателями или научными руководителями которых являются, как правило, преподаватели вузов или научные сотрудники НИИ.

Творческий, исследовательский характер носили и большинство работ, представленных на физической секции конференции. Это были доклады по теории относительности, ядерной физике, физике твердого тела, физике плазмы, другим областям экспериментальной и теоретической физики, а также по методике преподавания физики.

По итогам работы этой секции были отмечены работы учащихся ФТШ при ИАТЭ (Обнинск) К. Хазанова «Пространственновременные характеристики в релятивистской теории относительности», Т. Сапуновой «Наблюдаемые характеристики тел, движущихся с релятивистскими скоростями», А. Тимошина «Влияние эффектов релятивистской термодинамики на движение тел», А. Иванова «Эффект захвата мюона в реакции холодного термоядерного синтеза», а также С. Киселева (Днепропетровск) «Исследование температурной характеристики электронной компоненты низкотемпературной плазмы ацетиленокислородного пламени», Д. Короткова (Астрахань) «Исследование доменных структур магнитных пленок феррит-гранатов», Д. Суяткина (Курган, с. ш. № 4) «Боратные лазерные стекла», А. Редько (Новокузнецк, с. ш. № 44) «Некоторые закономерности в колебательной структуре спектров излучения и поглощения бензофенола».

Обобщая мнение всех участников конференции, мы выражаем надежду, что традиция проведения Обнинских конференций учащихся «Юность, наука, культура» будет продолжена, тем более что и зарубежные делегации изъявили желание принимать участие в работе конференции.

*Л. Лашко,  
зам. директора Центра НТТУ «Эврика»,  
А. Тихоненко,  
руководитель физической секции*

## **Дорогие читатели!**

Напоминаем вам,  
что журнал «Квант» распространяется только по подписке.  
Подписка принимается без ограничений во всех агентствах «Союзпечати»,  
на почтамтах и в отделениях связи.

Подписаться на наш журнал можно начиная с любого номера,  
но оформить подписку нужно до первого числа предподписного месяца.

Индекс «Кванта» в каталоге «Союзпечати» 70465,  
цена одного номера 1 р. 10 к.



**Ответы,  
указания,  
решения**

**Необходимые условия и задачи по параметрам**

- $x=0$  — необходимое условие существования единственного решения. Ответ:  $b=0, b=tg 1$ .
- $x=0$  — необходимое условие. Ответ:  $a=4/3$ .
- $x=0$  — необходимое условие. Ответ:  $a=9/4$ .
- $y=1$  — необходимое условие. Ответ:  $x=-\pi/2+2\pi k, k$  — целое.
- Необходимое условие для  $b$  при  $x=0$ :  $b=\sin b$ .  
Ответ:  $(-1; 0), (0; 0), (1; 0)$ .
- $x \geq -1$  — решение неравенства  $\sqrt{x^2+4x+7} \leq x+3$ .  
Необходимое условие  $x=0$ . Ответ:  $a=1$ .
- $a$  делится на 9 или на 6. Ответ:  $a=99$ .

**Основные школьные задачи по физике**

- До пережигания нити ускорения грузов равны нулю, а сила натяжения нити составляет  $3mg$ . В первый момент, пока грузы не успели сместиться, растяжения, а значит, и силы упругости пружинок сохраняют прежние значения, поэтому ускорения двух нижних грузов попрежнему равны нулю. Результирующая сила, действующая на верхний груз сразу же после пережигания нити, равна  $3mg$ , следовательно, его ускорение направлено вниз и равно  $3g$ .
- Обозначим большую массу через  $m_1$ , меньшую — через  $m_2$ . Запишем уравнения движения для блока и грузов

$$F - 2T = 0,$$

$$m_1 g - T = m_1 a,$$

$$T - m_2 g = m_2 a,$$

где  $a$  — ускорение грузов,  $T$  — натяжение нити,  $F$  — сила, действующая на блок со стороны оси. Учитывая, что по условию  $F = m_1 g$ , исключаем из уравнений  $T$  и  $a$  и находим

$$m_1 = 3m_2.$$

- Ускорение всей веревки  $a = F/m$  (где  $m$  — масса веревки). На отрезок веревки, заключен-

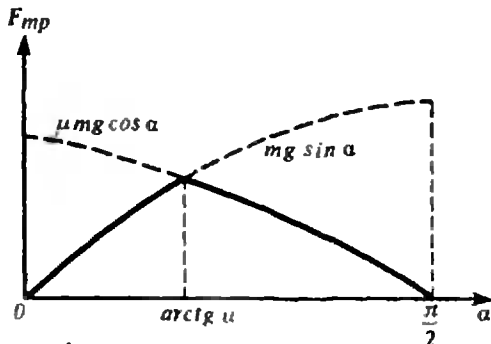


Рис. 1.

ный между выбранным сечением и свободным концом, действует только сила натяжения  $F_k$  в этом сечении. Учитывая, что масса этого отрезка  $m_1 = m(l-x)/l$ , получаем

$$F_k - m_1 a = F(l-x)/l.$$

- При небольшом угле наклона доски брусок находится в покое, и для силы трения покоя из второго закона Ньютона получаем

$$F_{трп} = mg \sin \alpha.$$

Скольжение отсутствует при условии  $F_{трп} < \mu N = \mu mg \cos \alpha$ , или при  $tg \alpha < \mu$ . Если  $\alpha > \arctg \mu$ , брусок будет соскальзывать с доски и

$$F_{трсм} = \mu N = \mu mg \cos \alpha.$$

Поэтому график зависимости  $F_{тр}(\alpha)$  состоит из двух участков (рис. 1).

- На мотоциклиста, движущегося со скоростью  $v$ , действуют сила тяжести  $m\vec{g}$ , сила нормальной реакции  $\vec{N}$  и сила трения покоя  $\vec{F}_{тр}$ . Уравнения движения в проекциях на вертикальную ось и на горизонтальную ось, направленную к центру окружности, имеют вид

$$F_{тр} - mg = 0,$$

$$N = mv^2/R.$$

Для того чтобы колеса не проскальзывали по поверхности цилиндра, должно выполняться условие

$$F_{тр} \leq \mu N.$$

Окончательно получаем

$$v \leq \sqrt{gR/\mu} \approx 14 \text{ м/с.}$$

- Количество теплоты в первом и втором случаях найдем по формулам

$$Q_1 = c_p m \Delta t, \quad Q_2 = rm,$$

где  $\Delta t = |t_2 - t_1|$ ,  $c_p$  — удельная теплоемкость, а  $r$  — удельная теплота парообразования воды. Приравняв каждое из количеств теплоты к потенциальной энергии балки  $Mgh$ , находим

$$h_1 = 8,6 \text{ м, } h_2 = 67,7 \text{ м.}$$

Этот простой пример позволяет наглядно почувствовать масштаб энергий, «задействованных» в окружающем нас мире.

- С помощью закона сохранения импульса

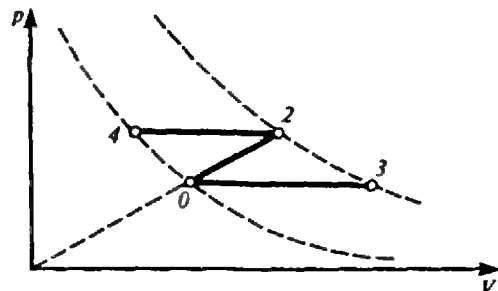


Рис. 2.

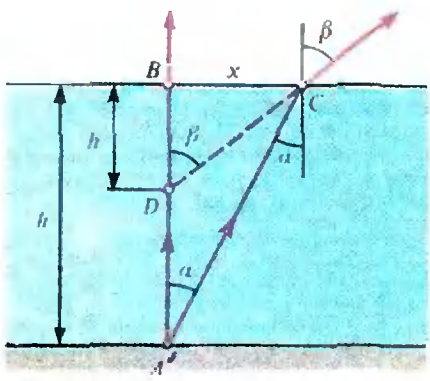


Рис. 3.

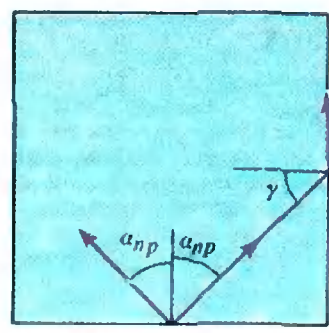


Рис. 4.

найдем конечную скорость второго шара  $u_2$ :  
 $mv = mu_1 + mu_2 \Rightarrow u_2 = 6 \text{ м/с.}$

Из условия задачи очевидно, что удар шаров неупругий, т. е. часть механической энергии системы при ударе переходит во внутреннюю энергию. Эта энергия распределяется между шарами поровну, приводя к повышению их температуры на одинаковую величину  $\Delta t$  (так как в процессе удара шары деформируются совершенно одинаково; это особенно хорошо видно в системе отсчета, связанной с центром масс системы). Получаем

$$mv^2/2 - (mu_1^2/2 + mu_2^2/2) = 2ct \Delta t,$$

откуда находим

$$\Delta t = 0,04 \text{ К.}$$

8. Так как внутренняя энергия идеального газа зависит только от его температуры, изменение внутренней энергии одинаково для всех трех процессов. Из первого закона термодинамики следует, что подведенное к газу количество теплоты будет тем больше, чем больше совершенная газом работа. В изохорном процессе  $0-1$  работа равна нулю, а в двух других она положительна, поэтому наименьшее количество теплоты подводится в первом процессе. Чтобы сравнить работу во втором и третьем процессах, обратим внимание на то, что работа газа в изобарном процессе

$$A = p\Delta V = \nu R\Delta T$$

зависит только от изменения температуры. Поэтому можно заменить изобарный процесс  $0-3$  изобарным же процессом  $4-2$  (рис. 2), где точки 4 и 0 лежат на одной изотерме. После такой замены становится очевидным, что работа в изобарном процессе больше, чем в процессе  $0-2$  (площадь под отрезком  $4-2$  больше, чем под отрезком  $0-2$ ). Итак, наибольшее количество теплоты было подведено в изобарном процессе  $0-3$ .

9. Так как перегородка в начале и в конце покоится, то полная работа газа над перегородкой равна нулю. Кроме того, по условию тепло не подводится к системе и не отводится от нее. Тогда из первого закона термодинамики следует, что внутренняя энергия газа не изме-

няется. Значит, и температура газа тоже не изменится.

10. КПД идеальной машины Карно, у которой температура нагревателя  $T_1$ , а холодильника  $T_2$ , равняется  $(T_1 - T_2)/T_1$ . В обоих случаях числитель увеличивается (на 1 К), а знаменатель в первом случае (когда увеличивается  $T_1$ ) возрастает, во втором (когда уменьшается  $T_2$ ) остается неизменным. Значит, КПД возрастет больше во втором случае.

11. При повороте зеркала на угол  $\alpha$  на такой же угол повернется нормаль к зеркалу. Так как падающий луч не меняет своего направления, угол падения изменится тоже на  $\alpha$ . Угол отражения — это угол между отраженным лучем и нормалью; следовательно, отраженный луч повернется на угол  $2\alpha$ .

12. Построим изображение любой точки  $A$  дна, образуемое преломленными на поверхности воды лучами (рис. 3). Рассмотрим лучи  $AB$  и  $AC$  и найдем точку  $D$  их пересечения после преломления. Обозначив расстояние  $DB$  через  $h'$ , расстояние  $BC$  через  $x$ , угол падения луча  $AC$  через  $\alpha$ , а угол преломления через  $\beta$ , получим

$$x/h = \text{tg } \alpha, \quad x/h' = \text{tg } \beta, \quad \sin \beta / \sin \alpha = n.$$

С учетом малости углов  $\alpha$  и  $\beta$  можно считать, что  $\text{tg } \alpha = \sin \alpha$ ,  $\text{tg } \beta = \sin \beta$ . Тогда находим, что кажущаяся глубина реки

$$h' = h/n = 75 \text{ см}$$

не зависит от  $\alpha$ , т. е. что точка  $D$  является изображением точки  $A$  (для лучей, идущих под малыми углами к вертикали).

13. Запишем закон преломления для лучей, идущих от текета и проникающих внутрь кубика:

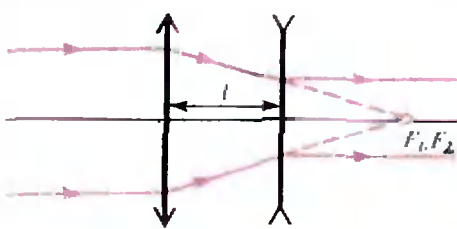


Рис. 5.

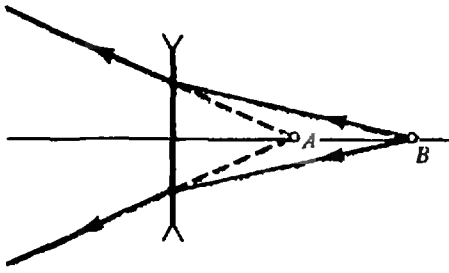


Рис. 6.

$$\sin \alpha / \sin \beta = 1/n,$$

где  $\beta$  — угол падения некоторого луча на нижнюю поверхность, а  $\alpha$  — угол его преломления в кубике. Видно, что при любых  $\beta$  выполняется неравенство

$$\sin \alpha \leq 1/n.$$

т. е. что все вошедшие лучи лежат внутри конуса с углом  $\alpha_{пр}$  ( $\sin \alpha_{пр} = 1/n$ ), равным предельному углу внутреннего отражения (рис. 4). Самые благоприятные условия для выхода через боковую грань имеет луч, идущий по образующей конуса. Условие его полного отражения от боковой грани имеет вид

$$\sin \gamma > \sin \alpha_{пр}.$$

Так как  $\sin \gamma = \cos \alpha_{пр}$ , получаем, что ни один из лучей не выходит через боковую грань при условии  $\cos \alpha_{пр} > \sin \alpha_{пр}$ , т. е. при  $\alpha_{пр} < \pi/4$ . Отсюда находим

$$n = 1/\arcsin \alpha_{пр} > \sqrt{2}.$$

14. Расстояние между линзами (рис. 5)

$$l = F_1 + F_2 = 15 \text{ см} + (-9) \text{ см} = 6 \text{ см}.$$

Убедитесь сами, что линзы могут стоять в любом порядке.

15. Рассмотрим обратный ход лучей, т. е. преломление в линзе лучей, исходящих из точки B (рис. 6). Получим, что изображение источника, помещенного в точку B, получится в точке A. Записав формулу линзы в виде  $1/f - 1/d = -1/F$ , найдем ее фокусное расстояние:

$$F = -30 \text{ см}.$$

**У Всесоюзная олимпиада по математике**

9 класс

- (1; 0; 3; 1), (-1; 0; -3; -1), (-1, 0, -3, -1), (3, 1, 1, 0).

Указание. Из исходной системы получаем

$$(xz - 2yt)^2 + 2(xt + yz)^2 = (x^2 + 2y^2)(z^2 + 2t^2) = 11,$$

откуда либо  $x^2 + 2y^2 = 1$  (т. е.  $x^2 = 1, y = 0$ ), либо  $z^2 + 2t^2 = 1$ .

2. Решение этой задачи (см. задачу M1299) будет опубликовано позже.

3. а) Ответ: не могут. Указание. Отрезок

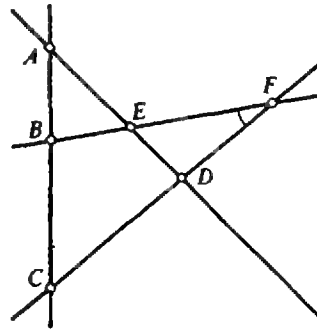


Рис. 7.

длины 1 не может быть стороной ни  $\triangle ABE$ , ни  $\triangle EFD$  (см. рис. 7), поэтому либо  $BC = 1$ , либо  $CD = 1$ . Пусть для определенности  $BC = 1$ , но тогда  $BF = CF$  (почему?) и  $\cos \angle F = -1 - 1/(2BF^2)$ . Применяя теорему косинусов к треугольнику  $EFD$ , получаем

$$ED^2 = EF^2 + FD^2 - 2EF \times FD + \frac{EF \times FD}{BF^2},$$

но в этой сумме последнее слагаемое — не целое!

б) Ответ: могут. См. рис. 8.

4. Решение этой задачи (см. задачу M1298) будет опубликовано позже.

5. а) Например,  $x = 1, y = 8$ .

б) Ответ: нельзя. Пусть  $xu + x$  и  $xu + y$  — квадраты различных натуральных чисел и  $y > x$ . Тогда  $x^2 < xu + x < xu + y$ . При этом  $(xu + y) - (xu + x) = y - x > (x + 1)^2 - x^2 = 2x + 1$ . Откуда  $y > 3x + 1$ .

6. Пусть  $O$  — точка пересечения отрезков  $KM$  и  $LN$  (см. рис. 9). Поскольку  $\angle NDM +$

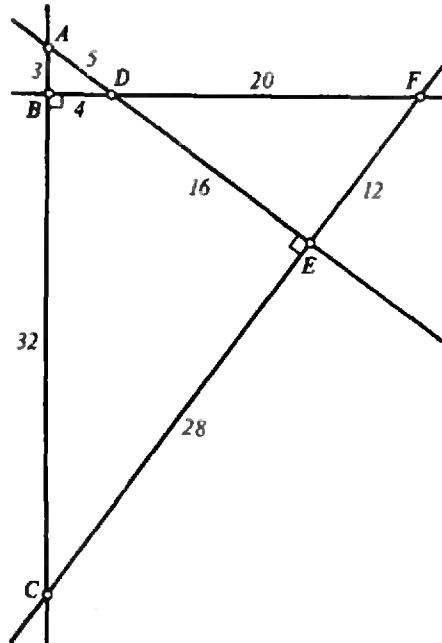


Рис. 8.

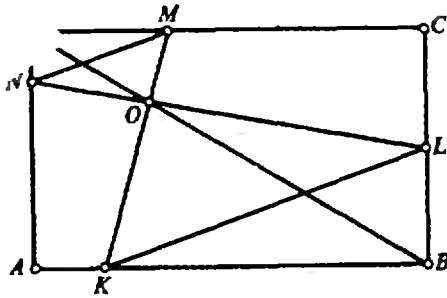


Рис. 9.

$\angle MON = 180^\circ$ , вокруг четырехугольника  $MDNO$  можно описать окружность. Поэтому  $\angle NOD = \angle NMD$ . Аналогично,  $\angle LOB = \angle LKB$ . А так как  $LK \parallel MN$ ,  $KB \parallel MD$ , то  $\angle NMD = \angle LKB$  и  $\angle NOD = \angle LOB$ , так что точки  $D, O$  и  $B$  лежат на одной прямой.

Второе решение (не использующее условие  $KM \perp NL$ ). Поскольку  $MN \parallel KL$ , то  $\angle MNO = \angle OLK$ ,  $\angle NMO = \angle LKO$  и треугольники  $ONM$  и  $OLK$  подобны. Но тогда  $MO/OK = NO/OL$  и четырехугольник  $OMDN$  гомотетичен четырехугольнику  $OKBL$  с центром  $O$ , и потому точки  $D, O$  и  $B$  лежат на одной прямой.

7. Решение этой задачи (см. задачу M1300) будет опубликовано позже.

8. Ответ: минус может быть расположен только в центральной клетке. Любой квадрат (рис. 10), состоящий более чем из одной клетки, содержит четное число отмеченных голубым клеток. Поэтому, если минус находится в отмеченной клетке, после каждого хода в отмеченных клетках окажется нечетное число минусов. Поворачивая отмеченные клетки на  $90^\circ$ , видим, что от минусов нельзя избавиться, если первоначально минус был не в центральной клетке. Если же минус находится в центральной клетке, то достаточно 5 ходов: перемена знаков в квадратах  $3 \times 3$  в левом нижнем и правом верхнем углах, в квадратах  $2 \times 2$  в двух остальных углах и во всем квадрате  $5 \times 5$ .

10 класс

1. Указание. Поскольку (неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим двух неотрицательных чисел):

$$a^2 + bc \geq 2a\sqrt{bc},$$

$$\frac{ab+ac}{2} \geq a\sqrt{bc},$$

достаточно сложить 6 неравенств, получаемых из выписанных заменой букв.

2. Ответ: а). б) не существует. Указание. Для доказательства утверждения пункта б) достаточно заметить, что если отношение стороны к медиане не меньше двух, то соответствующий угол является тупым или прямым (его вершина лежит внутри или на границе круга с центром в середине стороны и радиусом, равным половине этой стороны).

3. Ответ:  $2^v$ , где  $v$  — любое натуральное число, такое, что  $2^v \geq n$ .

После каждого хода на доске будут написаны

целые неотрицательные числа. Если сумма и разность двух таких чисел делятся на нечетное число  $d$ , то и сами эти числа делятся на  $d$ . Поэтому, если бы число  $k$  делилось на нечетное число  $d > 1$ , то и все первоначально написанные на доске числа делились бы на  $d$ , что невозможно, так как среди них есть 1. Поэтому у числа  $k$  нет нечетных простых делителей, т. е.  $k = 2^v$ . Так как после каждого хода максимальное из написанных на доске чисел не уменьшается, то  $k \geq n$ . Докажем, что можно получить любое значение  $k = 2^v \geq n$ . Одним ходом из пары  $(2^a, 2^a)$  получается пара  $(0, 2^{a+1})$ , а из пары  $(0, 2^c)$  — пара  $(2^c, 2^c)$ , поэтому если на доске написан набор из степеней двойки с показателями, не превосходящими  $v_0$ , такой, что среди чисел, входящих в набор, есть два равных числа, меньших  $2^{v_0}$ , то за несколько ходов можно получить числа, все равные  $2^{v_0}$ .

Индукцией по  $n$  покажем, что из набора  $1, 2, \dots, n$  всегда можно получить указанный набор из степеней двойки, причем в качестве  $v_0$  можно взять любое натуральное число, удовлетворяющее неравенству  $2^{v_0} \geq n$ . При  $n \leq 8$  утверждение проверяется непосредственно. Предположим, что оно верно при всех  $n$ , удовлетворяющих неравенствам  $8 \leq n \leq l$ , и докажем его справедливость при  $n = l + 1$ . Пусть  $l + 1 = 2^m + b$ , где  $1 \leq b \leq 2^m$ ,  $m \geq 3$ . Применяя указанное в условии преобразование к парам чисел  $p = 2^m + u, q = 2^m - u$  при  $1 \leq u \leq b$  ( $1 \leq u \leq b - 1$ , если  $b = 2^m$ ), мы получим набор, состоящий из следующих трех групп чисел:

- (1)  $1, 2, \dots, 2^m - b - 1$  (эта группа не содержит ни одного числа, если  $b = 2^m$  и  $b = 2^m - 1$ ).
- (2)  $2, 4, \dots, 2b$  (получена из разностей  $|p - q|$ ).
- (3)  $2^m, 2^{m+1}, \dots, 2^{m+l}$  (получена из сумм  $p + q$  и числа  $2^m$ ).

Если обе группы (1) и (2) содержат не меньше, чем по 3 числа ( $3 \leq b \leq 2^m - 4$ ), то к ним применимо предположение индукции. Если же только в одной из них содержится не менее трех чисел, то предположение индукции нужно применить к этой группе и воспользоваться тем, что числа, образующие



Рис. 10.

другую группу, уже являются степенями двойки. Случай, когда в обеих группах (1) и (2) содержится менее трех чисел, при  $m \geq 3$  невозможен, так как если в группах (1) и (2) не более двух чисел, то  $2^m - b - 1 \leq 2$  и  $2b \leq 4$ , откуда  $2^m \leq 5$ ,  $m \leq 2$ .

Утверждение доказано.

4. Ответ: 12.

Через каждую из 36 точек, отмеченных на рисунке 11, должен проходить разрез, так как иначе квадрат размером  $2 \times 2$  клетки с центром в отмеченной точке будет содержаться в некотором многоугольнике. Назовем ребром сторону клетки, не лежащую на границе фигуры, и будем считать, что длина ребра равна 1. Линиям разрезов должны принадлежать по крайней мере два из четырех ребер с концами в данной отмеченной точке. Всего ребер 144, поэтому не более чем по  $144 - 2 \cdot 36 = 72$  из них разрезы не проведены. Любой разрез по ребру увеличивает число  $n$  многоугольников, на которые разрезана фигура, не более чем на единицу. Поэтому, проведя разрезы по оставшимся ребрам, мы получим всего не более  $72 + n$  многоугольников. Но при этом фигура распадается на 84 отдельных квадрата  $1 \times 1$ , т. е.  $72 + n \geq 84$ , откуда  $n \geq 12$ .

Данную фигуру можно разрезать на 12 прямоугольников с одной из сторон длины 1, проведя, например, разрезы по горизонтальным ребрам. Ни один из этих прямоугольников не содержит квадрата  $2 \times 2$ .

Второе решение. Среди 61 точки-узлов сетки, лежащих внутри фигуры на рисунке 11, имеются 36 отмеченных и 25 неотмеченных точек. Если фигура разрезана на многоугольники так, как это требуется в условии задачи, то каждая отмеченная и неотмеченная точка «задета» разрезом (иначе найдется квадрат  $2 \times 2$ , который будет целиком принадлежать одному из многоугольников, на которые разрезана фигура).

Пусть мы провели разрез и при этом «задели»  $m$  отмеченных и  $n$  неотмеченных точек. Тогда либо  $m = n$ , либо  $|m - n| = 1$ . Так как первоначально разность между числом отмеченных и неотмеченных точек равна 11, то отсюда следует, что потребуется провести не менее 11 разрезов, чтобы удовлетворить условию зада-

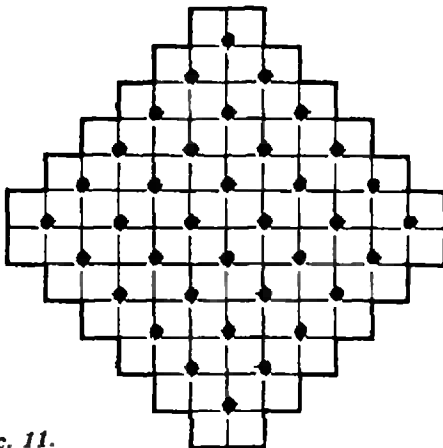


Рис. 11.

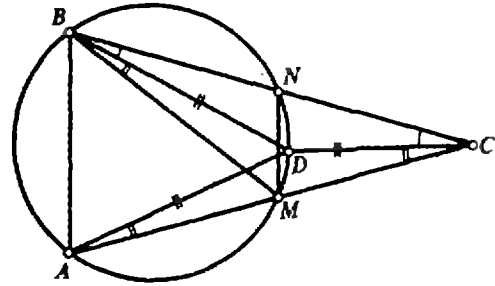


Рис. 12.

чи. Но тогда фигура распадается не менее, чем на 12 частей.

5. Согласно теореме синусов, радиус окружности, описанной около треугольника со стороной  $a$  и противолежащим этой стороне углом  $\alpha$ , равен  $a / (2 \sin \alpha)$ . Треугольники  $ABD$  и  $MNB$  вписаны в одну и ту же окружность, треугольники  $MNB$  и  $MNC$  имеют общую сторону  $MN$ , поэтому достаточно доказать, что  $\angle MCN = \angle MBN$  (рис. 12). Так как  $DB = DC$  и  $DA = DC$ , то  $\angle DBN = \angle DCN$  и  $\angle MAD = \angle MCD$ . Углы  $MAD$  и  $MBD$  равны как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу. Поэтому и  $\angle MBN = \angle MCN$ .

6. Решение этой задачи (см. задачу M1296) будет опубликовано позже.

7. Докажем утверждение задачи по индукции. При  $n=1$  и  $n=2$  оно очевидно. Пусть  $n > 2$  и пусть для досок размером  $m \times n$ , где  $m < n$ , утверждение уже доказано. Возьмем какой-либо набор миноров на доске  $n \times n$ , удовлетворяющий условию задачи. Рассмотрим пары клеток, симметричных относительно главной диагонали. Всего таких пар  $(n^2 - n) / 2$ . Если в каждой паре покрыто не менее одной клетки, то всего покрытых клеток не меньше, чем  $n + (n^2 - n) / 2 > n^2 / 2$ , и утверждение верно. Пусть клетки  $(i, j)$  и  $(j, i)$  не покрыты. Вычеркнем из доски  $i$ -ю и  $j$ -ю горизонтали и  $i$ -ю и  $j$ -ю вертикали. Останется доска  $(n-2) \times (n-2)$ . Пересечение каждого из миноров с этой доской есть минор полупериметра не меньше  $n-2$ . Действительно, у каждого минора вычеркнуты клетки, самое большее, двух строк, или двух столбцов, или одной строки и одного столбца, так как в противном случае он покрывал бы одну из клеток  $(i, j)$  или  $(j, i)$ . Таким образом, диагональ оставшейся после вычеркиваний доски  $(n-2) \times (n-2)$  покрыта минорами полупериметра не меньше  $n-2$ , и, следовательно, по предположению индукции не менее половины невычеркнутых клеток покрыто минорами. Рассмотрим теперь вычеркнутые клетки. Всего их  $4n - 4$ . Полупериметр минора, покрывающего клетку  $(i, i)$ , не меньше  $n$ , поэтому он покрывает не менее  $n-1$  клеток в  $i$ -ых строке и столбце. Аналогично, минор, покрывающий клетку  $(j, j)$ , покрывает не менее  $n-1$  клетки в  $j$ -ых строке и столбце. Поскольку клетки  $(i, j)$  и  $(j, i)$  не покрыты, в этих четырех строках и столбцах покрыто не менее  $2(n-1)$  клеток, т. е. не менее половины вычеркнутых клеток. Итак, миноры из рассматриваемого набора покрывают не менее половины клеток доски  $n \times n$ . Утверждение доказано.

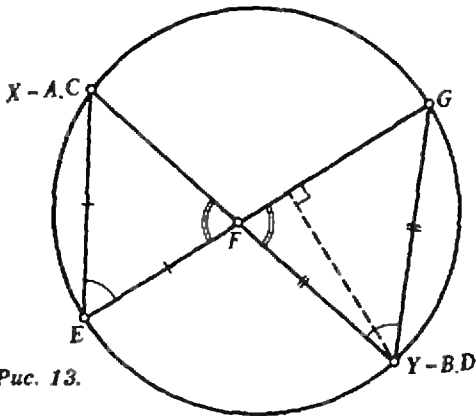


Рис. 13.

8. Решение этой задачи (см. задачу M1305) будет опубликовано позже.

11 класс

1. Ответ: нет.

Если последняя цифра  $a$  числа  $a_{n-1}$  не больше 5, то

$$10a_n = a_{n-1} - a \leq a_{n-1}.$$

В противном случае последняя цифра числа  $a_n = 10a_{n-1} - a_{n-1}$  не превосходит 5 и  $10a_{n+1} \leq a_n = 9a_{n-1}$ . Итак, при любом натуральном  $n$  либо  $a_n < a_{n-1}$ , либо  $a_{n+1} < a_n$ . Поэтому если бы последовательность  $(a_n)$  была бесконечной, то среди ее значений можно было бы выделить бесконечную убывающую последовательность натуральных чисел.

2. Решение этой задачи (см. задачу M1297) будет опубликовано позже.

3. Пусть  $G$  — точка пересечения луча  $EF$  со сферой, а  $XY$  — любой из отрезков  $AB$  и  $CD$ . Докажем, что точка  $Y$  (а с ней и прямая  $BD$ ) лежит в плоскости, перпендикулярной отрезку  $FG$  и проходящей через его середину. Действительно, точки  $X, E, Y, G$  лежат на одной окружности — сечении сферы плоскостью  $XEF$ . Треугольники  $XEF$  и  $GYF$  подобны по двум уг-

лам (рис. 13). Но коль скоро  $XE = FE$ , то  $GY = FY$ , что и требовалось доказать.

Замечание. Утверждение задачи остается справедливым и в том случае, если точка  $E$  не лежит на сфере.

4. Ответ: а) да; б) нет.

а) В правильном треугольнике  $ABC$  с центром  $O$  вписанной окружности и любой точкой  $P$  на окружности векторы  $\vec{PA}, \vec{PB}, \vec{PC}$  и  $\vec{PO}$  образуют нужную четверку, если только вектор  $\vec{PO} = \vec{r}$  не коллинеарен остальным (рис. 14). Действительно, обозначив  $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}, \vec{OC} = \vec{c}$ , имеем, например:

$$(\vec{PA} + \vec{PB}) \cdot (\vec{PC} + \vec{PO}) = (\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{r}) \cdot (\vec{c} + 2\vec{r}) = (2\vec{r} - \vec{c})(2\vec{r} + \vec{c}) = 4|\vec{r}|^2 - |\vec{c}|^2 = 0.$$

б) Допустим, что указанный набор из 91 вектора существует. Тогда, если  $\vec{OS}$  — их сумма, а  $\vec{OX}$  — сумма любых 19 из них, то точка  $X$  лежит на окружности  $\sigma$  с диаметром  $OS$ .

Докажем, что из набора нельзя выбрать 5 векторов  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2$  удовлетворяющих условиям  $a_1 \neq a_2 \neq a_3 \neq a_1, b_1 \neq b_2$ . В самом деле, иначе можно взять еще 17 векторов с некоторой суммой  $\vec{q}$  и образовать 6 векторов  $\vec{OX}_{ij} = \vec{q} + \vec{a}_i + \vec{b}_j$  ( $i=1, 2, 3, j=1, 2$ ), концы  $X_{ij}$  которых будут лежать на окружности  $\sigma$ . Но тогда 3 равных вектора  $\vec{X}_{11}\vec{X}_{12} = \vec{OX}_{12} - \vec{OX}_{11} = \vec{b}_2 - \vec{b}_1$  будут образовывать 3 несовпадающих хорды, что невозможно.

Из доказанного сразу следует, что в нашем наборе нет пятерки различных векторов. Более того, в нем не набирается даже четверки различных векторов  $x, y, z, t$ , так как иначе один из них, скажем  $t$ , встречался бы дважды, и, опять же, нашлась бы пятерка  $a_1 = t, a_2 = x, a_3 = y, b_1 = z, b_2 = t$ . По той же причине, если векторы набора образуют ровно три различных вида, то лишь один из видов имеет более одного представителя.

Поскольку не все наши векторы одинаковы, их имеется ровно два или три вида. Пусть наиболее многочисленный вид  $x$  встречается  $m \leq 89$  раз. Тогда найдутся еще векторы  $y$  и

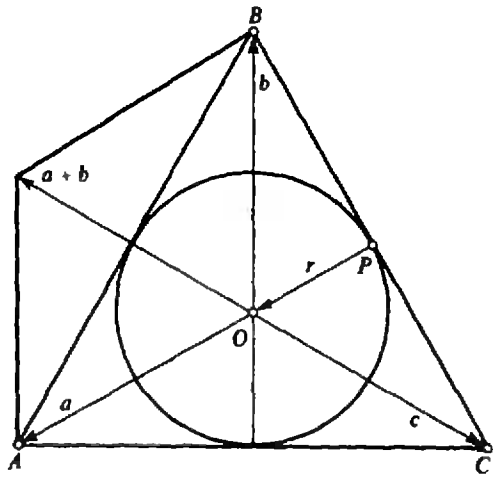


Рис. 14.

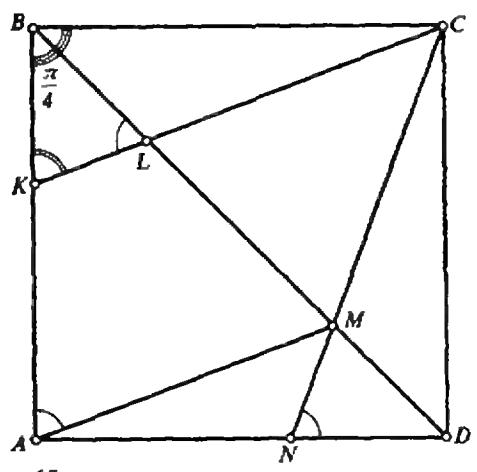


Рис. 15.

$\bar{z}$ , отличные от  $\bar{x}$  и образующие суммы

$$\begin{aligned} \overline{OY_1} &= 18\bar{x} + \bar{y}, \quad \overline{OY_2} = 18\bar{x} + \bar{z}, \\ \overline{OY_3} &= 17\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}, \quad \overline{OY_4} = 19\bar{x}. \end{aligned}$$

Из равенства

$$\frac{1}{2} (\overline{OY_1} + \overline{OY_2}) = \frac{1}{2} (\overline{OY_3} + \overline{OY_4})$$

следует, что середины хорд  $Y_1Y_2$  и  $Y_3Y_4$  совпадают. Однако сами эти хорды не совпадают (ибо  $Y_3 \neq Y_1$ , и  $Y_4 \neq Y_2$ ), поэтому они — диаметры окружности  $\sigma$ , откуда  $\bar{y} \neq \bar{z}$ ,  $m = 89$  и  $\overline{OY_1} + \overline{OY_2} = \overline{OS}$ , т. е.

$$36\bar{x} + \bar{y} + \bar{z} = 89\bar{x} + \bar{y} + \bar{z},$$

что невозможно.

Пусть, наконец, вектор  $\bar{x}$  встречается  $m = 90$  раз, а  $\bar{y}$  — один раз. Тогда, обозначив  $\overline{OZ_1} = 18\bar{x} + \bar{y}$ , получаем, что хорды  $\overline{OZ_2} = 19\bar{x}$  и  $\overline{SZ_1} = -72\bar{x}$  параллельны и симметричны относительно середины диаметра  $OS$  (обе они параллельны вектору  $\bar{x}$ ), что опять невозможно.

5. Докажем сначала, что  $\angle BKC + \angle DNC = 3\pi/4$  (рис. 15). Действительно, считая сторону квадрата единичной, обозначаем

$$\alpha = BK = \text{ctg } \angle BKC,$$

$$\beta = DN = \text{ctg } \angle DNC$$

и получаем

$$(1 - \alpha)(1 - \beta) = 2\alpha\beta,$$

откуда

$$\text{tg}(\angle BKC + \angle DNC) = \frac{\alpha + \beta}{-1 + \alpha\beta} = -1 = \text{tg } \frac{3\pi}{4}.$$

Теперь имеем:

$$\begin{aligned} \angle BLK &= \frac{3\pi}{4} - \angle BKL = \angle DNC = \\ &= \angle BCM = \angle BAM, \end{aligned}$$

поэтому  $\angle KLM + \angle KAM = \pi$  и точки  $A, K, L, M$  лежат на одной окружности. Аналогично доказывается, что точки  $A, N, M, L$  лежат на одной (той же самой) окружности.

6. Ответ: 6.

Каждое государство должно входить не менее, чем в 3 блока (иначе оно состояло бы в одном блоке не с любым, а максимум с  $49 + 49 = 98$  из 99 остальных государств). Поэтому число блоков не может быть меньше, чем  $3 \cdot 100 / 50 = 6$ .

а) Достаточно разбить все 100 государств на 4 группы по 25 и образовать блоки из пар групп всеми 6 возможными способами.

б) Достаточно разбить все государства на 10 групп

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$$

по 10 государств и образовать блоки

$$a_1 \cup b_1 \cup b_2 \cup b_3 \cup a_3, \quad a_2 \cup b_2 \cup b_3 \cup b_4 \cup a_4,$$

$$a_3 \cup b_3 \cup b_4 \cup b_5 \cup a_5, \quad a_4 \cup b_4 \cup b_5 \cup b_1 \cup a_1,$$

$$a_5 \cup b_5 \cup b_1 \cup b_2 \cup a_2, \quad a_1 \cup a_2 \cup a_3 \cup a_4 \cup a_5.$$

7. Решение этой задачи (см. задачу M1305) будет опубликовано позже.

8. Ответ: 1990.

Из соотношений

$$\begin{aligned} |y_k - y_{k+1}| &= \left| \frac{x_1 + \dots + x_k}{k} - \frac{x_1 + \dots + x_{k+1}}{k+1} \right| = \\ &= \left| \frac{x_1 + \dots + x_k - kx_{k+1}}{k(k+1)} \right| \leq \\ &\leq \frac{|x_1 - x_2| + 2|x_2 - x_3| + \dots + k|x_k - x_{k+1}|}{k(k+1)} \end{aligned}$$

при  $k = 1, \dots, 1990$  получим оценку

$$\begin{aligned} |y_1 - y_2| + \dots + |y_{1990} - y_{1991}| &\leq \\ &\leq |x_1 - x_2| \left( \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{1990 \cdot 1991} \right) + \\ &+ 2|x_2 - x_3| \left( \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{1990 \cdot 1991} \right) + \dots \\ &\dots + 1990|x_{1990} - x_{1991}| \cdot \frac{1}{1990 \cdot 1991} = \\ &= |x_1 - x_2| \left( 1 - \frac{1}{1991} \right) + |x_2 - x_3| \left( 1 - \frac{2}{1991} \right) + \dots + \\ &+ |x_{1990} - x_{1991}| \left( 1 - \frac{1990}{1991} \right) \leq \\ &\leq 1991 \left( 1 - \frac{1}{1991} \right) = 1990. \end{aligned}$$

Полученная оценка достигается при  $x_1 = 1991, x_2 = \dots = x_{1991} = 0$ , поскольку все выписанные неравенства в этом случае обращаются в равенства.

### Международная олимпиада школьников по информатике

I тур. Грамотное решение задачи (для всех трех заданий) должно предусматривать выполнение следующих действий:

- 1) проверка всех введенных данных на корректность;
- 2) выделение области недостижимых точек, определяемой значениями  $L1$  и  $L2$  (если  $L1 > L2$ , то это точки, расстояние от которых до начала координат меньше  $L1 - L2$  или больше  $L1 + L2$ );
- 3) перемещение сверла из одной точки в другую с учетом того, что в большинстве достижимых точек сверло может находиться при двух типах положения звеньев ( $\Pi$ , когда направление звена  $L2$  получается из  $L1$  поворотом вокруг общего шарнира против часовой стрелки на угол, не больший  $180^\circ$ , и  $\Pi$ , когда  $L2$  получается из  $L1$  поворотом на тот же угол по часовой стрелке; всего получается четыре варианта:  $\Pi \rightarrow \Pi$ ,  $\Pi \rightarrow \Pi$ ,  $\Pi \rightarrow \Pi$ ,  $\Pi \rightarrow \Pi$ );
- 4) вычисление времени перемещения сверла из одной точки в другую с использованием соотношения

$$t = \max \left\{ \frac{\Delta\varphi_1}{\omega_1}, \frac{\Delta\varphi_2}{\omega_2} \right\},$$

где

$$\Delta\varphi_1 = \min_{k \in \{-1, 0, 1\}} |\varphi_1 - \varphi'_1 + 2k\pi|,$$

$$\Delta\varphi_2 = \min_{k \in \{-1, 0, 1\}} |\varphi_2 - \varphi'_2 + 2k\pi|,$$

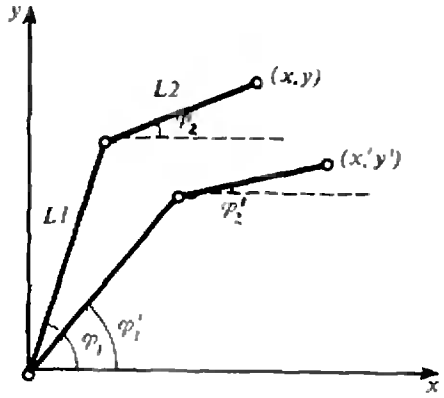


Рис. 16.

$\alpha\varphi_1, \varphi_1'$  и  $\varphi_2, \varphi_2'$  — углы, образуемые в соответствующих позициях звеньями L1 и L2 с осью OX (рис. 1) и определяемые с помощью теоремы косинусов.

Для правильного выполнения задания а) достаточно указать только две точки и время перемещения сверла из одной из этих точек в другую. Выполнение задания б) основано на полном переборе глубины  $N$  с учетом четырех вариантов перемещения сверла из одной точки в другую. Перебор можно упорядочить, построив таблицу размером  $(2N + 1) \times (2N + 1)$ , элементы которой определяют время перемещения сверла из  $i$ -й точки в  $j$ -ю (включая начальную и с учетом возможных вариантов положения звеньев робота для каждой точки). Если такая таблица построена, то исходная задача сводится к задаче коммивояжера. Эффективность перебора можно повысить прекращением поиска, если время работы робота превысит наименьшее из уже рассмотренных времен.

Выполнение задания в) отличается от предыдущего: последовательности точек формируются до тех пор, пока время работы робота не превысит заданной величины  $T$ . Из полученных последовательностей выбирается та, которая содержит максимальное количество точек. В случае, если в определенной области сосредоточено большое количество точек, то лучше будет в эту область сразу и перейти. Правильность решения данной задачи оценивалась с помощью следующих тестов:

- 1) 1, 1, 1, 1, 1, 100, 1, 0;
- 2) 1, 1, 1, 1, 1, -5, 1, 1, 1, 1;
- 3) 1, 1, 1, 1, 0, 100, 1, 1, 2, 0;
- 4) 2, 1, 1, 1, 0, 100, 1, 3, 0, 0, 4, 0, 0, 4;

- 5) 2, 1, 0, 1, 0, 19, 5, 4, 1, 0, 3, 0, 2, 1, 2, -1;
- 6) 4, 1, 1, 10, 0, 100, 5, 2, 4, 1, 4, -1;
- 7) 4, 1, 10, 1, 0, 100, 5, 2, 4, 1, 4, -1;
- 8) 3, 2, 1, 10, 0, 20, 1, 15, 0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, 5, 1, 2, 1, 3, 1, 4, -1, 2, -1, 3, -1, 4, 2, 3, -2, 3, 1, -2, 1, -3.

Правильно работающая программа, выполняя задание б), должна дать при пропуске тестов следующие результаты:

- 3) 0→1,  $T_{min}=0$ ;
- 5) 0→2→3→1→4 или 0→2→4→1→3,  $T_{min}=25,0$ ;
- 6) 0→1→2 или 0→2→1,  $T_{min}=10,5$ ;
- 7) 0→1→2 или 0→2→1,  $T_{min}=11,6$ .

При выполнении задания в) должны получаться такие результаты: 3) 1; 4) 3; 5) 2; 6) 2; 7) 2; 8) 13.

II тур. Выполнение задания а) основано на следующем утверждении. Пусть какой-либо текст при заданном множестве кодовых слов  $A$  дешифруется неоднозначно. Тогда при двух различных способах дешифровки (рис. 2) кодовые слова в первой и во второй дешифрованных записях могут пересекаться следующим образом:

а) кодовое слово в одной дешифрованной записи совпадает с начальной частью кодового слова в другой, например  $A_{k1} = H_{i1}$ ;

б) конечная часть кодового слова в одной дешифрованной записи совпадает с начальной частью кодового слова в другой дешифрованной записи, например  $K_{i1} = H_{k2}$  или  $K_{k2} = H_{i1}$ ;

в) конечная часть кодового слова в одной дешифрованной записи совпадает с одним или несколькими кодовыми словами в другой, например  $k_{i2} = A_{k3}$  или  $K_{i4} = A_{k5}A_{k6}$ .

Если последовательно отбрасывать в обеих дешифрованных записях совпадающие подстроки кодовых слов, то для рассматриваемого случая всегда найдется оставшаяся конечная часть кодового слова в одной записи, совпадающая с кодовым словом в другой записи.

Поэтому алгоритм решения задания а) будет заключаться в следующем. Сначала путем сравнения всех кодовых слов между собой с учетом возможных способов пересечения определяем множество получающихся при этом различных конечных частей. Например, если  $A = \{C, CB, CBV, CBVV, CBVVV\}$ , то это множество будет включать элементы:  $V, BV, BVV, BVVV$ . Затем последовательно проверяем, являются ли кодовые слова началом или концом элементов множества, полученного на предыдущем этапе. Если являются, то, удаляя общие части, опять

Рис. 17.

$A_{i1}$		$A_{i2}$		$A_{i3}$		$A_{i4}$	
$H_{i1}$	$K_{i1}$	$H_{i2}$	$K_{i2}$			$H_{i4}$	$K_{i4}$
$A_{k1}$		$A_{k2}$	$A_{k3}$	$A_{k4}$		$A_{k5}$	$A_{k6}$
	$H_{k2}$	$K_{k2}$					



формируем новое множество конечных частей и т. д. Данный процесс заканчивается, если хотя бы одна конечная часть в полученном множестве совпадает с каким-либо кодовым словом, что говорит о неоднозначности дешифровки, либо если новых конечных частей получить не удастся. Этот процесс конечный, так как с каждым шагом количество элементов вновь формируемого множества конечных частей всегда уменьшается.

Для выполнения задания б) в случае, если текст дешифруется неоднозначно, достаточно на каждом шаге удалять из множества  $A$  кодовые слова в следующей последовательности: сначала по одному, затем по два и т. д. Процесс заканчивается, если в результате удаления соответствующих кодовых слов удается определить, что неоднозначной дешифровки не существует.

Выполнение задания в) (процесс дешифровки) осуществляется перебором с возвратом путем последовательного сравнения символов дешифруемого текста с кодовыми словами. При совпадении начальной части текста с каким-либо кодовым словом формируется новая запись удалением этой части из первоначального текста и т. д. Процесс заканчивается, если весь текст удалось дешифровать, в противном случае дешифровка повторяется, но изменяется последовательность сравнения кодовых слов с начальными частями записей, формируемых на каждом этапе.

Правильность решения данной задачи также оценивалась с помощью тестов. Чтобы читатели могли оценить работоспособность своей программы, приведем только один из них:

$$A = \{AB, BA, BBA, BABB\}.$$

Для этого множества кодовых слов дешифровка неоднозначна. Чтобы дешифровка была однозначной, необходимо из этого множества удалить любое одно кодовое слово. Исходный текст BABBABA дешифруется следующим образом: BA BBA BA. Исходный текст BABBABBA дешифруется неоднозначно: BA BBA BBA или BABB AB BA.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 10)

1. Самому старшему в семье мужчине сейчас 91 год, в детстве его звали Тимошей.

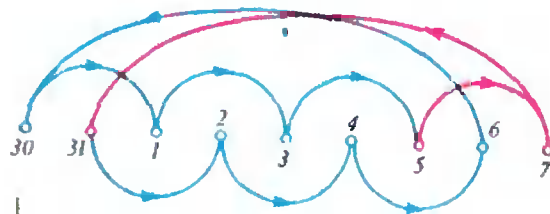


Рис. 18.

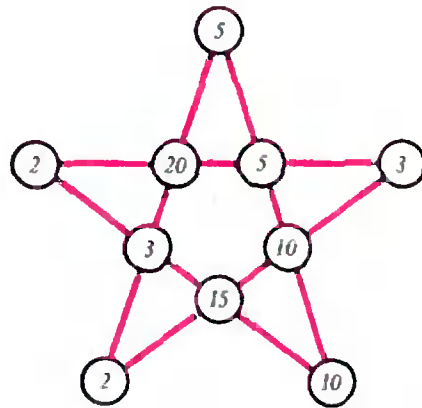


Рис. 19.

2. Единственное число, равное утроенной сумме своих цифр, — 27.

3. Ответ: 6 дней. Чтобы показать, что семи дней не может быть, нанесем на прямой точки, соответствующие рассматриваемым дням, и соединим стрелочками те дни, про которые известно, что в один из этих дней (там стрелочка начинается) Мюнхаузен убил меньше уток, чем в другой (там стрелочка заканчивается). Получим то, что изображено на рисунке 18. Поскольку цепочка стрелочек замкнулась, то предположение о том, что Мюнхаузен мог говорить свою фразу 7 дней, привело к противоречию. Если рассмотреть лишь шесть дней, откинув на рисунке красные стрелочки, то легко построить пример результатов охоты Мюнхаузена, удовлетворяющий условиям задачи: 31 июля убита одна утка, 2 августа — две, 4 августа — 3 и т. д., наконец 5 августа — восемь, а во все дни, предшествующие 30 июля, Мюнхаузен убивал, скажем, по 1991 утке.

4. Одна из возможных расстановок изображена на рисунке 19.

5. У треугольников  $AMC$  и  $BNA$  (рис. 20) равные площади, кроме того, угол  $CAM$  равен углу  $ABN$  и  $CA = AB$ . Отсюда легко вывести равенство указанных треугольников. Нетрудно видеть, что один из них повернут относительно другого на  $60^\circ$ , следовательно, угол  $CPN$  между проведенными лучами равен  $60^\circ$ .

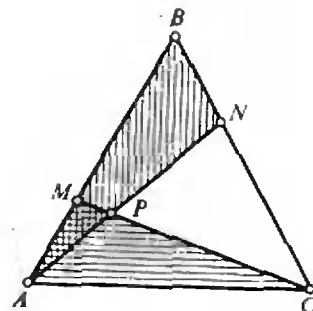


Рис. 20.

### Вопросы и задачи

1. За длительное время температуры полотенца и батареи выравнялись. Однако на ощупь ткань будет казаться менее горячей из-за меньшей теплопроводности.
2. Температура в комнате повысится. Количество выделяемой в единицу времени теплоты будет равно мощности, потребляемой холодильником.
3. Вода внутри макарон не кипит, так как ее температура равна температуре воды в кастрюле и поэтому нет подвода тепла от более нагретого тела.
4. Выждать пять минут, затем бросить сахар. Количество теплоты, отдаваемое нагретым телом окружающей среде за одно и то же время, пропорционально разности температур тела и среды.
5. Вначале уровень керосина понизится за счет теплового расширения колбы. Когда же прогреется и керосин, его уровень повысится за счет того, что температурный коэффициент расширения у керосина больше, чем у стекла.
6. Да.
7. Можно предварительно охладить термометр в холодильнике и стряхнуть. Или же нужно подержать термометр под мышкой в течение долгого времени, извлечь его и сразу же стряхнуть. Термометр покажет температуру тела.
8. Нет, поскольку ртуть замерзает уже при температуре около  $-38,9^{\circ}\text{C}$ .
9. Нужно завернуть оба термометра вместе, чтобы предотвратить потерю тепла в окружающее пространство. Более нагретым был тот термометр, показания которого будут уменьшаться.
10. Термометр будет нагреваться до тех пор, пока количества поглощаемого и излучаемого им тепла не сравняются. Если термометр находится на таком же расстоянии от Солнца, как и Земля, он покажет примерно «земную» температуру.
11. Выше, иначе вокруг нас не было бы воды в жидком состоянии.
12. Нет. См. ответ к задаче 3.
13. Во втором случае часть межмолекулярных связей кристаллической решетки уже разрушена при измельчении кристалла. Поэтому для растворения порошка требуется меньше энергии, и температура воды после растворения во втором сосуде будет более высокой.
14. Эталон силы света, использующий тепловое излучение, должен иметь стабильную температуру, что достигается только в процессе кристаллизации металла.
15. Прохладным вечером горячий дым и газы лучше поднимаются вверх, чем днем, когда достаточно тепло.
16. Вначале подливали более холодную воду, затем — более горячую, чем вода в сосуде.

### Микроопыт

Железо, обладая хорошей теплопроводностью, отводит тепло от бумаги, поэтому ее температура не достигает той, при которой бумага может загореться.

# Квант

Главный редактор —  
академик Ю. Осипьян

Первый заместитель главного редактора —  
академик С. Новиков

Заместители главного редактора:  
В. Боровишки, А. Варламов, Ю. Соловьев

### Редакционная коллегия:

А. Абрикосов, А. Боровой, Ю. Брук,  
А. Виленкин, С. Воронин, Б. Гиеденко,  
С. Гордюнин, Е. Городецкий, Н. Долбиллин,  
В. Дубровский, А. Зильберман, С. Иванов,  
С. Кротов, А. Леонвич, Ю. Лысов, Т. Петрова,  
А. Сосинский, А. Стасенко, С. Табачников,  
В. Уроев, А. Черноуцан, А. Штейнберг

### Редакционный совет:

А. Анджанс, В. Арнольд, М. Башмаков,  
В. Берник, В. Болтынский, Н. Васильев,  
Е. Велихов, И. Гинзбург, Г. Дорофеев,  
М. Каганов, Н. Коистантинов, Г. Коткин,  
Л. Кудрявцев, А. Логунов, В. Можаяв,  
И. Новиков, В. Разумовский, Н. Розов,  
А. Савин, Р. Сагдеев, А. Серебров,  
Я. Смородинский, И. Сурин, Е. Сурков,  
Л. Фаддеев, В. Фирсов, Д. Фукс,  
И. Шарыгин, Г. Яковлев

### Номер подготовили:

А. Виленкин, Л. Винюкова, А. Егоров,  
Л. Кардашевич, Е. Коршунова, А. Котова, А. Самин,  
В. Тихомирова, А. Черноуцан

### Номер оформили:

Е. Варк, С. Лукки, Э. Назаров,  
П. Чернуский, Г. Шиф, В. Юдин

Редактор отдела художественного оформления  
Г. Шиф

Художественный редактор Е. Потапенкова

Зав. редакцией С. Давыдова

Корректор Н. Дорохова

103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»,  
тел. 250-33-54

Сдано в набор 22.08.91. Подписано к печати 22.10.91.  
Формат 70×100/16. Вумага офс.  
Гарнитура школьная. Печать офсетная.  
Усл. печ. л. 6,45. Усл. кр.-отт. 27,09. Уч.-изд. л. 7,64.  
Тираж 87 468 экз. Заказ 1372. Цена 70 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени  
Чеховский полиграфический комбинат  
Государственной ассоциации предприятий, объединений  
и организаций полиграфической промышленности  
«АСПОЛ»  
142300, г. Чехов Московской обл.

# Шахматная страничка

## ПУТЕВОДИТЕЛЬ ПО СКАЗОЧНЫМ ШАХМАТАМ

Шахматная игра создавалась много веков, правила ее неоднократно менялись. Известно немало одних только национальных разновидностей шахмат. Самой древней игрой считается чатуранга, пришедшая из Индии и затем превратившаяся в шатрандж у арабов и шатранг у персов. До сих пор играют в японские шахматы (шоги), китайские (цзюнь ки), корейские (тьян-кеун), армянские (тама), монгольские (шатар) и т. д.

Необычные, сказочные шахматные игры отличаются от настоящих шахмат необычной доской, необычными фигурами или необычными правилами игры. Разумеется, возможно присутствие сразу двух или даже всех трех «необычностей».

Самый простой способ получить новую шахматную игру — увеличить размеры доски. Придумаю множество математических и занимательных игр и задач на прямоугольных или квадратных досках и даже на бесконечной доске.

В реальных шахматных играх рекорд принадлежит доске  $16 \times 12$ . Такие шахматы предложил в свое время чемпион мира Х. Р. Капабланка с целью преодолеть казавшуюся ему неотвратимой «ничейную смерть» шахмат. Игра ведется удвоенным комплектом фигур, причем начальный ход пешки возможен сразу на четыре поля. Для победы достаточно заматовать любого из королей противника. Матч Капабланки с венгерским гроссмейстером Мароци в макишахматы, состоявшийся в 1929 году, закончился победой автора игры со счетом 3:1. Партии продолжались более ста ходов и тянулись часов по десять. Изобретение Капабланки пространства не получило — перспектива «ничейной смерти» оказалась преувеличенной.

Упомянем еще доску  $12 \times 12$  для игры в *великие шахматы*,

колыбелью которых была Индия. Каждый игрок имел по 12 пешек и фигур с экзотическими названиями — крокодил, жираф, лев, единорог.

Известный завоеватель Тамерлан, страстный любитель шахмат, тоже считал недостаточными размеры обычной доски. Для *образцовых шахмат* его личной системы была изготовлена специальная доска  $11 \times 10$  — одиннадцать видов фигур (генерал, верблюд, рыцарь и т. д.) располагались на ней в три ряда.

Много игр придумали шахматные композиторы-сказочники. (Часть этих игр когда-то описывалась на страницах «Кванта», мы приведем соответствующие ссылки.)

В *шахматах на параллельных досках* (1985, № 8) игра ведется одновременно на двух досках, расположенных параллельно одна над другой. На каждой доске ходы обычные, но фигуры могут перемещаться в пространстве с одной доски на другую.

Геометрическими или топологическими преобразованиями стандартной доски нетрудно соорудить доску самой фантастической формы. Можно играть на цилиндрической доске (1989, № 9, 10), тороидальной, конусоидальной и даже на листе Мебиуса.

В *проективные шахматы* играют на проективной доске (1974, № 3). Правила игры основаны на свойствах прямых линий в проективной геометрии. В частности, любое семейство параллельных прямых пересекается в «бесконечно удаленной» точке.

Существует огромное множество сказочных фигур. Напомним лишь о некоторых играх с участием таких фигур: *цирце, решетчатая доска, франкфуртские шахматы, магические* (1989, № 9, 10).

В игре *до первого шаха* выигрывает тот, кто первым объявляет шах. В игре *шахматы без шахов* объявлять шах запрещено — первый же из них должен быть одновременно и матом. Напротив, в игре *шахматы с шахами* шах объявлен — если он возможен, то его необходимо объявить

(любым способом). В *двухходовых шахматах* каждый ход белых и черных состоит из двух обычных (после первого «полухода» король может находиться под шахом). В *шахматных поддавках* победителем становится тот, кто первым отдаст противнику все свои фигуры (включая короля) или запатует их (1982, № 9). А *буря над шахматной доской* еще не описывалась в литературе на русском языке. Эта игра, которую придумал француз Пьер Клакон, сочетает в себе элементы шахмат и карт. Двое партнеров в ходе партии используют еще специальные карты, каждая из которых дает некое предписание, изменяющее нормальное течение поединка. В колоде 72 карты, а на руках у партнеров постоянно находится по пять. Вот какие указания могут в них содержаться.

«Сделайте ход, после чего поменяйте местами слона и коня противника.»

«Если три угла доски заняты, то в четвертый угол поставьте любую свою фигуру, — выполнение этого указания заменяет обычный ход.»

«Сделайте ход, после чего одного из ваших коней превратите в верблюда (коня  $3 \times \times 1$ ).»

«Сделайте ход, после чего поменяйте места своего короля и короля противника — при условии, что они не попадают под шах.»

Среди карт есть повторяющиеся, а также отменяющие действия соперника.

Тот, чья очередь ходить, выбирает любую из карт и раскрывает ее. Цель игры — заматовать неприятельского короля, но достижение ее может произойти самым неожиданным образом. У игрока может найтись карта, после предъявления которой король противника моментально окажется в плену. Колоду карт можно пополнить за счет своей собственной фантазии. Во Франции игра пользуется немалой популярностью.

## КУБ ДЕНИСА

Читатель А. Цукар из Новосибирска прислал описание головоломки, которую он назвал «куб Дениса». Она состоит из 64 частично непрозрачных кубиков, из которых требуется сложить полностью непрозрачный куб  $4 \times 4 \times 4$ . В головоломке используются кубики 8 различных окрасок (все они показаны в верхней части рисунка). Каждый тип окраски повторяется в 8 кубиках.

Попробуйте решить следующие задачи этой головоломки:

1. Сложите куб, непрозрачный со стороны любой грани.

2. Соберите куб так, чтобы со стороны любой грани всех четырех цветов было поровну.

3. Соберите непрозрачный куб, глядя на который со стороны одной грани, можно увидеть в любом столбце из 4-х кубиков все 4 цвета.

4. Докажите, что при выбранных 8 типах раскраски в 4 цвета невозможно составить куб, все грани которого были бы одноцветными.

Изготовить самому 64 кубика довольно затруднительно, но если кубики и цвета пронумеровать, то можно решать все задачи на листе бумаги. Еще интереснее — написать программу и строить куб на экране дисплея. И наконец, попробуйте сформулировать и решить аналогичные задачи для 4-мерного куба. Того, кто справится с этим, ждет специальный приз журнала «Квант».

